doi:10.13582/j.cnki.1672-7835.2019.01.005

亚里士多德模态三段论逻辑的形式化公理系统探讨①

张晓君,袁娇娇
(四川师范大学 逻辑与信息研究所, 四川 成都 610068)

摘　要:利用广义量词理论、可能世界语义学和集合论,可以简洁明了地对亚里士多德模态三段论进行形式化和有效性的证明。根据有效的亚里士多德模态三段论应该遵守的基本规则,可以从 6 656 个亚里士多德模态三段论中,筛选出有效的 384 个模态三段论。把通过向有效的直言三段论 AAA-1 和 EAE-1 中添加模态词而得到的 20 个有效模态三段论作为基础公理,就可以为亚里士多德模态三段论逻辑建立起形式化公理系统。

关键词:亚里士多德模态三段论;可能世界语义学;形式化;公理化
中图分类号:B819　**文献标志码**:A　**文章编号**:1672-7835(2019)01-0031-07

亚里士多德模态三段论可以看作是通过向直言三段论中添加一个必然模态词□或一个可能模态词◇而得到的扩展三段论。利用广义量词理论①,可以对直言三段论进行形式化②、有效性③④及其公理化⑤的证明。那么,利用广义量词理论,是否可以对亚里士多德模态三段论(在本文中简称模态三段论)进行形式化和有效性证明? 甚至对其进行形式化公理系统的研究呢?

由于模态三段论的任一前提和结论都可以是 A、E、I、O、□A、□E、□I、□O、◇A、◇E、◇I、◇O 这 12 种命题中的任何一种命题,加之中项有 4 种不同的位置,因此自然语言中的模态三段论有 $12\times12\times12\times4-256=6\ 656$ 种,其中减去的是直言三段论的个数。本文的目的就是从 6 656 种模态三段论中,筛选出全部有效的模态三段论,并对其进行公理化探讨。由于笔者至今都没有查阅到对模态三段论逻辑进行公理化的国内外相关文献,因此,本文属于探索性的前沿研究。

本文的研究表明:(1)利用广义量词理论、可能世界语义学和集合论,可以简洁明了地对模态三段论进行形式化和有效性的证明;(2)根据有效的模态三段论应该遵守的基本规则,可以从 6 656个模态三段论中,筛选出全部有效的 384 个模态三段论;(3)把由第一格 AAA 式和第一格 EAE 式的直言三段论,通过添加模态词而形成的 20 个有效模态三段论作为基础公理,可以推导出另外 364 个有效的模态三段论,从而完成对模态三段论逻辑建立起形式化公理系统的任务;(4)模态三段论的形式化和有效性证明及其公理化过程,都充分表明了逻辑的结构主义特征,其研究方法具有很强的普适性;(5)模态三段论逻辑的形式化公理系统研究过程彰显了事物相互联系相互转化的哲学思想。这一创新性研究成果对于促进

---

① **收稿日期**:2018-07-28
基金项目:国家社会科学基金项目(16BZX081)
作者简介:张晓君(1970-),女,四川南充人,博士,副研究员,主要从事自然语言逻辑、人工智能逻辑和 Agent 理论研究。

①Peters S, Westerståhl D. *Quantifiers in Language and Logic*. Oxford: Claredon Press, 2006.

②郝一江:《自然语言语篇推理的形式化探究》,《湖南科技大学学报(社会科学版)》2016 年第 1 期。

③林胜强,张晓君:《广义量词的推理模式研究》,《湖南科技大学学报(社会科学版)》2014 年第 6 期,此文被人大复印报刊资料《逻辑》2015 年第 1 期全文转载。

④张晓君:《关于居间量词 most 的广义三段论的有效性》,《湖南科技大学学报(社会科学版)》2016 年第 4 期,此文被人大复印报刊资料《逻辑》2017 年第 2 期全文转载。

⑤张晓君,李晟:《传统三段论的形式化与公理化研究》,《湖北大学学报(哲学社会科学版)》 2016 年第 6 期。

广义量词理论、模态三段论逻辑、自然语言信息处理以及计算机科学中的知识表示和知识推理的进一步发展,都具有重要的意义。

一 国内外相关研究概览

亚里士多德是第一个系统研究模态三段论的逻辑学家,在其《工具论》中讨论模态三段论的篇幅超过了讨论非模态三段论的篇幅①。Łukasiewicz(1957)考虑使用他的四值模态逻辑系统,即 ŁM 系统,对亚里士多德模态三段论进行描述,但是发现这种匹配并不好②。McCall (1963)发展出了第一个判断必然三段论是否有效的形式系统,即 L-X-M 演算,给出了断定或驳斥必然三段论形式语句的判定程序③。Geach(1964)提出了一个处理实然模态三段论的系统,但结果也不如人意④。Johnson(1989)给出了亚里士多德必然三段论的模型⑤。

虽然学者们的研究取得了不小的进展,但是Smith(1995)在对亚里士多德模态三段论的研究状况进行总结时说:虽然解释家一直试图为模态三段论逻辑找到某个一致的解释,却无法保证所有的结果是一致的,这些研究结果是令人失望的;之所以这样,是因为亚里士多德模态三段论系统本身就是不一致的,任何修修补补都无济于事⑥。Smith 的这一观点至今仍然盛行⑦。

Thomason(1993,1997)的工作,都没有达到为模态三段论逻辑提供一个一致的解释的目的⑧⑨。Thom(1996)认为亚里士多德犯了很多逻辑错误⑩。Schmidt(2000)则认为是由于几种模态命题之间的转换,导致无法建立起一致的模态三段论逻辑⑪。

Johnson(2004)通过对 McCall 的 L-X-M 系统及其相关研究进行检查后,发现这一纯句法系统具有非亚里士多德特点,从而发展出了改良的QLXM´系统,为亚里士多德认为显然无效的大量的实然三段论、必然三段论和或然三段论提供反模型⑫。Malink(2006)试图反驳"Smith 认为无法为亚里士多德模态三段论找到一个一致的形式模型"的悲观论调,认为无法为模态三段论逻辑建立一个一致的系统,原因不在于模态三段论逻辑本身,而是在于没有恰当地把现代模态逻辑和外延集合论应用到模态三段论逻辑中;并试图为亚里士多德模态三段论逻辑重新建构一个一致的形式模型⑬。Malink(2013)自称为所有亚里士多德所断定的有效的和无效的模态三段论,提供了一个一致的而且连贯的模型⑭。

我国逻辑学者对亚里士多德模态三段论逻辑的研究也取得了进展。比如周礼全先生(1984)就对亚里士多德模态三段论中的必然性和可能性进行了探讨,指出必然性可以分为绝对必然性和相对必然性⑮。张家龙先生(1990)利用现代模态逻辑知识,为亚里士多德《前分析篇》中模态三段论,构造了一个一元谓词自然演绎系统,给出了必然模态三段论系统的判定程序,然后在可能世界语义学的基础上构造了此系统的模型,并利用换位律、假言三段论律、模态三段论律、差等律和显

---

①周礼全:《必然性与可能性》,《四川师范大学学报(哲学社会科学版)》1984 年第 3 期。

②Łukasiewicz J. *Aristotle's Syllogistic: From the Standpoint of Modern Formal Logic* (*second edition*). Oxford: Clerndon Press, 1957.

③McCall S. "Studies in Logic and the Foundations of Mathematics", in: *Aristotle's Modal Syllogisms.* Amsterdam: North- Holland Publishing Company, 1963.

④Geach P T. "Review of McCall (1963)", *Ratio*, 1964(6): 200-206.

⑤Johnson, F. "Models for Modal Syllogisms", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1989(30): 271-284.

⑥Smith, R. "Article 'Logic'", in: J. Barnes (ed.), *The Cambridge Companion to Aristotle.* Cambridge: Cambridge University Press, 1995, pp.27-34.

⑦Malink M. "A Reconstruction of Aristotle's Modal Syllogistic", *History and Philosophy of Logic*, 2006 (27): 95.

⑧Thomson S K. "Semantic Analysis of the Modal Syllogistic", *Journal of Philosophical Logic*, 1993(22): 111-128.

⑨Thomson S K. "Relational Models for the Modal Syllogistic", *Journal of Philosophical Logic*, 1997 (26): 129-141.

⑩Thom P. *The Logic of Essentialism: An Interpretation of Aristotle's Modal Syllogistic*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer,1996.

⑪Malink M. "A Reconstruction of Aristotle's Modal Syllogistic", *History and Philosophy of Logic*, 2006 (27): 95.

⑫Johnson F. "Aristotle´s Modal Syllogisms", in: D. M. Gabbay and J. Woods (eds.), *Handbook of the History of Logic*, Amsterdam: Elsevier, 2004(1): 247.

⑬Malink M. "A Reconstruction of Aristotle's Modal Syllogistic", *History and Philosophy of Logic*, 2006 (27): 95- 141.

⑭Malink M. *Aristotle´s Modal Syllogistic*. Cambridge: Harvard University Press, 2013.

⑮周礼全:《必然性与可能性》,《四川师范大学学报(哲学社会科学版)》1984 年第 3 期。

露法等推理规则,挖掘出了更多的有效模态三段论①。张家龙先生(1996)对亚里士多德《前分析篇》中的必然三段论系统及其证明方法和排斥方法进行了改进,并对这一系统中有效的模态三段论和无效的模态三段论进行了深入的研究②。

杜国平(2004)对亚里士多德证明模态三段论所用的显示法,进行了深入细致的研究,并指出显示法的实质就是现代谓词逻辑中的存在量词的例示规则,而且显示法与模型论中的常量方法也有相同之处③。江璐(2015)从必然模态三段论出发,阐述了奥卡姆对亚里士多德模态三段论的扩展和革新④。张晓君(2018)对亚里士多德模态三段论的形式化、有效性及其形式化公理系统进行了较为细致的探索性研究⑤。

在本文中,笔者将另辟蹊径,利用广义量词理论、可能世界语义学和集合论的相关知识,以及直言命题和直言模态命题三分结构的思想,对亚里士多德模态三段论进行深入研究。本文的研究思路是:首先在对模态三段论进行形式化的基础上,摸索出形式化地证明有效模态三段论的普适方法,然后找出有效模态三段论应该满足的基本规则,进而筛选出全部有效的模态三段论,最后进行模态三段论逻辑的形式化公理系统的探讨。

二　有效模态三段论形式化证明的普适方法

笔者(2014)的研究表明:(1)利用广义量词理论和集合论对模态三段论进行形式化和有效性的证明,类似于利用广义量词理论和集合论对直言三段论进行形式化及其有效性的证明⑥,只不过模态三段论的有效性证明还需要借助可能世界语义学的知识;(2)如果去掉模态三段论的模态词后,其形式化和有效性的证明就坍塌成了对应的直言三段论的形式化和有效性证明。对此,我们首先考察一个模态三段论实例。

实例 1:

大前提:所有动物必然要吃东西。

小前提:所有狗必然是动物。

结　论:所有狗必然要吃东西。

我们应该如何对其进行形式化和有效性证明呢? 为此,在本文中规定:(1)S 表示主项所表示个体组成的集合,P 表示谓项所表示个体组成的集合,M 表示中项所表示个体组成的集合;(2)用 all、some、no 和 not all 分别表示“所有的”“有的”“没有”和“并非所有”这四个亚氏量词;(3)四个直言命题 A(所有 S 都是 P)、E(所有 S 都不是 P)、I(有 S 是 P)、O(有 S 不是 P,等价于并非所有 S 都是 P)则可分别形式化为 all(S, P)、no(S, P)、some(S, P)和 not all(S, P);(4)“必然所有 S 是 P”形式化为□all(S, P)(简记为□A);“可能有 S 不是 P”等价于“可能并非所有 S 都是 P”,形式化为◇not all(S, P)(简记为◇O);(5)第一格 AAA 式的直言三段论用 AAA-1 表示;(6)模态三段论的格与式的定义与直言三段论的格与式的定义类似,比如:□E□A◇O-3 表示第三格□E□A◇O 式模态三段论。其他与此类似。

根据广义量词理论⑦和集合论的知识,可以给出亚氏量词如下真值定义:

定义 1:亚氏量词的真值定义:

(1)all(S, P) $\Leftrightarrow S\subseteq P$　(2)some(S, P) $\Leftrightarrow S\cap P\neq\varnothing$

(3)no(S, P) $\Leftrightarrow S\cap P=\varnothing$　(4)not all(S, P) $\Leftrightarrow S-P\neq\varnothing$

根据模态逻辑知识,可以给出直言模态命题如下真值定义:

定义 2:直言模态命题的真值定义:

(1)□all(S, P)成立,当且仅当,在任意可能世界α中,all(S, P)为真。

(2)◇all(S, P)成立,当且仅当,至少存在一个可能世界α,使得 all(S, P)为真。

(3)□some(S, P)成立,当且仅当,在任意可能世界α中,some(S, P)为真。

(4)◇some(S, P)成立,当且仅当,至少存在

①张家龙:《亚里士多德模态逻辑的现代解释》,《哲学研究》1990 年第 1 期。
②张家龙:《亚里士多德的必然三段论》,《湖北大学学报(哲学社会科学版)》1996 年第 3 期。
③杜国平:《显示法证明分析》,《哲学研究》2004 年第 6 期。
④江璐:《奥卡姆的模态三段论——其对亚里士多德模态三段论逻辑的发展与转化》,《世界哲学》2015 年第 6 期。
⑤张晓君:《汉语指代消解及其相关推理模式研究》,人民出版社 2018 年版。
⑥张晓君:《广义量词理论研究》,厦门大学出版社 2014 年版,第 155-165 页。
⑦Peters S, Westerståhl D. *Quantifiers in Language and Logic*. Oxford: Claredon Press, 2006.

一个可能世界α,使得 some(S, P)为真。

(5)□no(S, P)成立,当且仅当,在任意可能世界α中,no(S, P)为真。

(6)◇no(S, P)成立,当且仅当,至少存在一个可能世界α,使得 no(S, P)为真。

(7)□not all(S, P)成立,当且仅当,在任意可能世界α中,not all(S, P)为真。

(8)◇not all(S, P)成立,当且仅当,至少存在一个可能世界α,使得 not all(S, P)为真。

在模态三段论实例 1 中,如果令大项 P 表示论域中所有要吃东西的个体组成的集合,中项 M 表示论域中所有动物组成的集合,小项 S 表示论域中所有狗组成的集合,那么,实例 1 可形式化为:□all(M, P)∧□all(S, M)⇒□all(S, P)。由于它是第一格的三段论,并且涉及到三个必然全称肯定命题□A,因此简称为□A□A□A-1。

事实 1(□A□A□A-1):模态三段论模式□all(M, P)∧□all(S, M)⇒□all(S, P)是有效的。

证明:假设两个前提□all(M, P)与□all(S, M)成立,那么根据定义 2 的(1)可知:□all(M, P)成立,当且仅当,在任意可能世界α中,all(M, P)成立;而且□all(S, M)成立,当且仅当,在任意可能世界β中,all(S, M)成立。由于这里的α和β都是任意的可能世界,我们不妨取α=β,即:在任意可能世界α中,all(M, P)和 all(S, M)都成立。根据定义 1 的(1)可知:all(M, P)⇔M⊆P 且 all(S, M)⇔S⊆M。即:M⊆P 且 S⊆M,因此:S⊆P,再次根据定义 1 的(1)可知:在任意可能世界α中,all(S, P)成立。再次根据定义 2 的(1)可知:□all(S, P)成立。证毕。

根据事实 1,可直接得到下面的推论 1。

推论 1:下面 5 个模态三段论模式都是有效的:

(1)(□A□A□I-1):□all(M, P)∧□all(S, M)⇒□some(S, P)

(2)(□A□AA-1):□all(M, P)∧□all(S, M)⇒all(S, P)。

(3)(□A□AI-1):□all(M, P)∧□all(S, M)⇒some(S, P)。

(4)(□A□A◇A-1):□all(M, P)∧□all(S, M)⇒◇all(S, P)

(5)(□A□A◇I-1):□all(M, P)∧□all(S, M)⇒◇some(S, P)

证明:(1)由于必然全称命题蕴含必然特称命题,有:□all(S, P)⇒□some(S, P),再根据事实 1,可证得推论 1 的(1);(2)由于必然命题蕴含实然命题,有:□all(S, P)⇒all(S, P),再根据事实 1,可证得推论 1 的(2);(3)由于全称命题蕴含特称命题,有:all(S, P)⇒some(S, P),再根据推论 1 的(2),可证得推论 1 的(3);(4)由于必然命题蕴含可能命题,有:□all(S, P)⇒◇all(S, P),再根据事实 1,可证得推论 1 的(4);(5)由于可能全称命题蕴含可能特称命题,有:◇all(S, P)⇒◇some(S, P),再根据推论 1 的(4),可证得推论 1 的(5)。

下面我们再来考察另一个模态三段论实例。

实例 2:

大前提:并非所有的鸟都必然会飞。

小前提:所有的鸟可能都是有羽毛的动物。

结　论:并非所有有羽毛的动物都可能会飞。

在实例 2 中,如果令大项 P 表示论域中所有会飞的个体组成的集合,中项 M 表示论域中所有鸟组成的集合,小项 S 表示论域中所有有羽毛的动物组成的集合,那么,模态三段论实例 2 可以形式化为:□not all(M, P)∧◇all(M, S)⇒◇not all(S, P)。

事实 2(□O◇A◇O-3):模态三段论模式□not all(M, P)∧◇all(M, S)⇒◇not all(S, P)有效。

证明:假设两个前提□not all(M, P)与◇all(M, S)成立,那么根据定义 2 的(7)可知:□not all(M, P)成立,当且仅当,在任意可能世界α中,not all(M, P)成立;根据定义 1 的(2)可知:◇all(M, S)成立,至少存在一个可能世界β,使得 all(M, S)。由于这里的α是任意的可能世界,因此,至少存在一个可能世界β,使得 not all(M, P)和 all(M, S)都成立。分别根据定义 1 的(4)和(1)可知:not all(M, P)⇔M－P≠∅且 all(M, S)⇔M⊆S,即有:M－P≠∅且 M⊆S,因此,S－P≠∅。再次根据定义 1 的(4)可知:not all(S, P)成立。可见:至少存在一个可能世界β,使得 not all(S, P)成立。再次根据定义 2 的(8)可知:◇not all(S, P)成立。证毕。

由此可见,通过借助可能世界语义学、直言命题和直言模态命题的三分结构、广义量词理论对亚氏量词的真值定义,可以成功简明地证明有效的模态三段论,这一方法具有普适性。笔者利用

类似的方法(包括利用 some 和 no 的对称性),成功地证明了 169 个有效的模态三段论,详情可参见张晓君(2018)①。

三　有效模态三段论应该遵守的基本规则

虽然本文对模态三段论的证明简洁明了,但是要想利用这种方法筛选出全部有效的模态三段论,则容易重复或遗漏。要想不重不漏地从 6 656 种模态三段论中,筛选出全部有效的模态三段论,需要另辟蹊径。直言三段论是通过制定有效直言三段论应该满足的基本规则,达到了从 256 个直言三段论中筛选出全部 24 个有效三段论的目的,那么是否可以通过制定有效模态三段论应该满足的基本规则,来达到不重不漏地筛选出全部有效的模态三段论的目的呢? 答案是肯定的。

仔细观察笔者证明过的 169 个有效的模态三段论就会发现:有效的模态三段论去掉所有的模态词之后,得到的直言三段论也是有效的。比如:□E□AE-1 有效,去掉所有模态词后得到的 EAE-1也是有效的。可见:有效的模态三段论无非是在 24 种有效的直言三段论的基础上,添加模态词而得到的。因此,有效的模态三段论除了要满足直言三段论的所有基本规则外,还必需满足模态三段论的特殊规则。即:有效的模态三段论必需满足以下 7 条规则:

规则 1:模态三段论去掉所有模态词后得到的直言三段论,必需满足“中项至少周延一次”。

规则 2:模态三段论去掉所有模态词后得到的直言三段论,必需满足“前提中不周延的项,在结论中也不得周延”。

规则 3:前提和结论中否定命题个数相等。

规则 4:前提中至少包含一个全称命题。

规则 5:如果前提之一是特称命题,则结论也必需是特称命题。

规则 6:两个前提中只要其中之一是可能性命题,就不能够推出必然性或实然性结论。

规则 7:两个实然性前提,不能够推出必然性结论。但是一个必然性前提和实然性前提,可能推出必然性结论(对此有质疑者,请参见文献张家龙(1996)②)。

模态三段论只有全部满足以上七条规则,才是有效的。如果违反其中任何一条规则,都是无效的。而其中前五条规则也是有效的直言三段论必需满足的规则,因此,在 24 种有效的直言三段论的基础上,通过添加模态词的方法来筛选有效的模态三段论,则只需要检验是否满足最后两条规则就可以了,如果都满足,则是有效的,否则就是无效的。这样处理就可以大大提高我们从 6 656种模态三段论中不重不漏地筛选出全部有效的模态三段论的效率。

四　有效模态三段论的筛选方法

现在笔者试图在 24 种有效的直言三段论(满足前 5 条规则)的基础上,通过添加模态词的方法,找出由此可以形成的所有可能的模态三段论,并利用规则 6 和规则 7 来淘汰其中无效的模态三段论,剩下的就是有效的模态三段论。

以第一格模态三段论为例。第一格有效的模态三段论是在直言三段论 AAA-1、AAI-1、AII-1、EAE-1、EAO-1 和 EIO-1 的基础上添加模态词得到的。对所有有效的直言三段论而言,对两个前提和结论中的每一个命题均可以添加模态词□或◇,添加后的模态三段论总共含有的模态词数量有三种可能:只一个模态词、含有两个模态词、含有三个模态词。

限于篇幅原因,下面仅仅给出通过 AAA-1 添加模态词得到的有效的模态三段论:

(1)在直言三段论 AAA-1 中添加模态词□或◇,而得到的含有三个模态词的模态三段论有 $2+2\times2+2=8$ 种情况:[1] □A□A□A-1、[2] ◇A◇A◇A-1、[3] □A□A◇A-1、[4] □A◇A□A-1、[5] ◇A□A□A-1、[6] □A◇A◇A-1、[7] ◇A□A◇A-1、[8] ◇A◇A□A-1。其中的[4]、[5]和[8]的前提之一是一个可能命题,而结论却是必然性命题,违反规则 6,都是无效的。其它 5 个模态三段论都是有效的。

(2)在直言三段论 AAA-1 中添加模态词□或◇,而得到的含有两个模态词的模态三段论有 $2\times3+2\times2+2=12$ 种情况:[9] □A□AA-1、[10] □AA□A-1、[11] A□A□A-1、[12] ◇A◇AA-

①张晓君:《汉语指代消解及其相关推理模式研究》,人民出版社 2018 年版,第 258-285 页。

②张家龙:《亚里士多德的必然三段论》,《湖北大学学报(哲学社会科学版)》1996 年第 3 期,第 34-35 页。

1、[13] ◇AA◇A-1、[14] A◇A◇A-1、[15] □A◇AA-1、[16] □AA◇A-1、[17] A□A◇A-1、[18] ◇A□AA-1、[19] ◇AA□A-1、[20] A◇A□A-1。其中的[12]、[18]、[19] 与[20]这 4 个模态三段论的前提之一是可能性命题,而结论是实然性或必然性命题,违反规则 6,是无效的模态三段论。其他 8 个模态三段论都是有效的。

(3)在直言三段论 AAA-1 中添加模态词□或◇,而得到的只含有一个模态词的模态三段论有 2×3=6 种情况:[21] □AAA-1、[22] A□AA-1、[23] AA□A-1、[24] ◇AAA-1、[25] A◇AA-1、[26] AA◇A-1。这里的[23] AA□A-1 是两个实然前提,蕴涵一个必然结论,违反规则 7,是无效的;而这里的[24]和[25]的前提之一是一个可能命题,而结论却是实然命题,违反规则 6,它们也是无效的。其他 3 个模态三段论是有效的。

由此可见,在直言三段论 AAA-1 中添加模态词□或◇,而得到的模态三段论共有 8+12+6=26 种,其中有效的只有 5+8+3=16 种,无效的模态三段论有 10 种。通过其他有效的直言三段论添加模态词得到模态三段论的情况类似,因此,在 6 656 个模态三段论中,有效的模态三段论的个数有:24×16 = 384 个。

五　模态三段论逻辑的形式化公理系统

在 24 个有效的直言三段论中,张晓君和李晟(2016)利用广义量词理论,把直言三段论 AAA-1 和EAE-1作为基础公理,推出了另外 22 个直言三段论,完成了对直言三段论逻辑的形式化公理系统的研究①。我们能否对模态三段论逻辑的形式化公理系统进行研究呢? 为此,首先需要找出进行形式化公理系统研究的基础公理。既然 384 个有效的模态三段论都是在 24 个直言三段论的基础上,添加模态词得到的,而直言三段论逻辑的形式化公理系统是以直言三段论 AAA-1 和 EAE-1 作为基础公理而实现的,那么模态三段论逻辑的形式化公理系统,能否以直言三段论 AAA-1 和 EAE-1 通过添加模态词,而得到的 32 个有效的模态三段论作为基础公理而实现呢?

答案是肯定的。在这 32 个有效的模态三段论,排除掉可以由其中的模态三段论推出的 12 个模态三段论外,如下 20 个模态三段论可以作为基础公理:

[1]□A□A□A-1	[2] ◇A◇A◇A-1
[3] □A◇A◇A-1	[4] ◇A□A◇A-1
[5]□AA□A-1	[6] A□A□A-1
[7] ◇AA◇A-1	[8] A◇A◇A-1
[9]□A◇AA-1	[10] AA◇A-1
[11] □E□A□E-1	[12] ◇E◇A◇E-1
[13]□E◇A◇E-1	[14] ◇E□A◇E-1
[15] □EA□E-1	[16] E□A□E-1
[17]◇EA◇E-1	[18] E◇A◇E-1
[19] □E◇AE-1	[20] EA◇E-1

笔者的研究表明:进行公理化的过程中,除了会应用到 some 和 no 的对称性(即:some(S, P)⇔some(P, S)和 no(S, P)⇔no(P, S))、□与◇可以相互定义、some 与 no 互为外否定、all 与 not all 互为外否定(即有:¬no=some 而且¬some=no、¬all=not all 而且¬not all=all)外,还会应用到如下两个命题变形规则,即规则 1:从((p∧q)→r)可以推出((¬r∧p)→¬q);规则 2:从((p∧q)→r)可以推出((¬r∧q)→¬p)。

如何从作为基础公理的第一格模态三段论,推出另外的第一、二、三、四格模态三段论呢? 在此,笔者各举一个最为复杂的典型例子加以说明。

例 1:E□A□E-1 ⇒EI◇O-1

证明:对于 E□A□A□E-1,即 no(M, P)∧□all(S, M)⇒□no(S, P),由于 no 具有对称性,即 no(M, P)⇔no(P, M),用 no(P, M)代替其中的 no(M, P)可得:no(P, M)∧□all(S, M)⇒□no(S, P),根据□no(S, P)⇒no(S, P)可得 no(P, M)∧□all(S, M)⇒no(S, P)。根据命题变形规则 1 可知,从((p∧q)→r)可以推出((¬r∧p)→¬q),因此:¬no(S, P)∧no(P, M)⇒¬□all(S, M),由于□与◇可以相互定义,因此,¬no(S, P)∧no(P, M)⇒◇¬all(S, M)。又因为¬no=some 而且¬all=not all,因此 some(S, P)∧no(P, M)⇒◇not all(S, M),通过字母易字可得:some(S, M)∧no(M, P)⇒◇not all(S, P),经过大前提前置可得:no(M, P)∧some(S, M)⇒◇not all(S, P),即 EI◇O-1 有效。

例 2:□A□A□A-1 ⇒□A◇O◇O-2

①张晓君,李晟:《传统三段论的形式化与公理化研究》,《湖北大学学报(哲学社会科学版)》2016 年第 6 期。

证明：对于□A□A□A-1，即□all(M, P)∧□all(S, M)⇒□all(S, P)，根据命题变形规则 1 可知，从((p∧q)→r)可以推出((¬r∧p)→¬q)，因此：¬□all(S, P)∧□all(M, P)⇒¬□all(S, M)，由于□与◇可以相互定义，因此，◇¬all(S, P)∧□all(M, P)⇒◇¬all(S, M)。又因为¬all=not all，因此◇not all(S, P)∧□all(M, P)⇒◇not all(S, M)，通过字母易字可得：◇not all(S, M)∧□all(P, M)⇒◇not all(S, P)，经过大前提前置可得：□all(P, M)∧◇not all(S, M)⇒◇not all(S, P)，即□A◇O◇O-2 有效。

例 3：◇E□A◇E-1 ⇒□A□A□I-3

证明：对于◇E□A◇E-1，即：◇no(M, P)∧□all(S, M)⇒◇no(S, P)，根据◇no(S, P) ⇒ ◇not all(S, P)可得：◇no(M, P)∧□all(S, M)⇒◇not all(S, P)，再根据 no(M, P)⇔no(P, M)可得：◇no(P, M)∧□all(S, M)⇒◇not all(S, P)。再利用命题变形规则 2 可知，从((p∧q)→r)可以推出((¬r∧q)→¬p)，因此：¬◇not all(S, P)∧□all(S, M)⇒¬◇no(P, M)，由于□与◇可以相互定义，可得：□¬not all(S, P)∧□all(S, M)⇒□¬no(P, M)。又因为¬not all=all 而且¬no=some，因此，□all(S, P)∧□all(S, M)⇒□some(P, M)。经过字母易字和大前提前置可得：□all(M, P)∧□all(M, S)⇒□some(S, P)，即：□A□A□I-3 有效。

例 4：E□A□E-1 ⇒□I□AI-4

证明：根据□E ⇒◇E 和 E□A□E-1 可得 E□A◇E-1，利用命题变形规则 2 对 E□A◇E-1 进行变换可得□I□AI-3，再用□some(P, M)代替□I□AI-3 前提中的□some(M, P)即可。

这四种类型的例子是笔者在对模态三段论逻辑进行形式化公理系统研究的过程中遇到的最为复杂的例子，大约一半的模态三段论的公理化证明则简单得多。比如：

例 5：根据◇A ⇒◇I 和□A◇AA-1 可直接推出□A◇AI-1。

例 6：根据命题变形规则 1 和◇A□A◇A-1 可直接推出◇A□O◇O-2。

例 7：根据命题变形规则 2 和 E□A□E-1 可直接推出□I◇AI-3：。

例 8：根据◇A ⇒◇I 和 AA◇A-1 可得 AA◇I-1，再用◇some(P, S)代替[AA◇I-1 结论中的◇some(S, P)可得 AA◇I-4。

事实上，笔者用类似于例 1-例 8 的方法，已经从本文给出的 20 个模态三段论基础公理出发，推导出了另外的 325 个有效的模态三段论，详情可参见张晓君(2018)①。但是，可能由于笔者思虑不周，目前还没有找到如何从这 20 个基本公理推导出另外 39 个有效的模态三段论的方法。如果解决了这一问题，那么就完成了对模态三段论逻辑的形式化公理系统研究这一艰巨复杂的任务。这有待我们继续深入研究，但愿本文的研究能起到抛砖引玉的作用。

On the Formal Axiomatic System for Aristotelian Modal Syllogism Logic

ZHANG Xiao-jun & YUAN Jiao-jiao

(Institute of Logic and Information, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China)

Abstract: By means of generalized quantifier theory, possible world semantics and set theory, it is possible to succinctly and explicitly formalize Aristotelian modal syllogisms and prove their validity. According to the basic rules for valid Aristotelian modal syllogisms, all of 384 valid modal syllogisms can be screened out from 6656 Aristotelian modal syllogisms. By using the 20 valid modal syllogisms obtained by adding modal operators to valid categorical syllogisms AAA-1 and EAE-1 as the basic axioms, a formal axiomatic system can be established for Aristotelian modal syllogism logic.

Key words: Aristotelian modal syllogism; possible world semantics; formalization; axiomatization

(责任校对　游星雅)

①张晓君：《汉语指代消解及其相关推理模式研究》，人民出版社 2018 年版。