doi:10.13582/j.cnki.1672-7835.2022.05.006

弗完全模态逻辑及其逻辑特性

郝旭东

(华东师范大学 哲学系,上海 200241)

摘　要:P_1 是一个基本的弗完全逻辑系统,其重要特征是排中律在一般意义上无效,并且有些会导致矛盾扩散的逻辑原则在其中失效,从而使得弗完全逻辑具有可以容纳矛盾冲突,但不会导致整个系统无意义的逻辑特性。在系统 P_1 的基础上,通过直接的逻辑扩充可以建立一系列弗完全模态逻辑系统,即 P_1K, P_1D, P_1T, P_14, P_1G,并可证明它们的可靠性和完全性。这些具有弗完全性质的模态逻辑系统,都具有容忍"真矛盾"的能力。

关键词:弗完全;排中律;模态逻辑;真矛盾;悖论

中图分类号:B81　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-7835(2022)05-0045-10

一　问题的提出

弗完全(paracompleteness)是弗协调(paraconsistency)的对偶概念。在弗协调逻辑中,矛盾律的普遍有效性受到了限制;相应地,在弗完全逻辑中,排中律并非在一般意义上有效。从该角度来看,正如弗协调逻辑学者达・科斯塔(Da Costa)和马可尼(Marconi)所言,非经典逻辑中的直觉主义逻辑和一些多值逻辑就是弗完全的①。本文的关注点在于最早由弗协调逻辑学家们建立起来的弗完全逻辑系统 P_1,该系统是按照类似于弗协调逻辑系统 C_1 通过正加的方式而得到的逻辑系统②。

弗完全逻辑的概念最早由斯摩棱诺夫(Smolenov)引入③,而弗完全逻辑通常使用的定义则是由弗协调逻辑学家罗帕瑞克(Loparić)和达・科斯塔给出的,即如果一个逻辑系统使得其中的公式及其否定可以同时为假,那么这个逻辑系统就是弗完全的④。达・科斯塔及其合作者不仅给出了弗完全逻辑系统 P_1 的公理以及基本的语义⑤,而且还揭示了弗完全逻辑系统 P_1 和弗协调逻辑系统 C_1 之间的对偶关系,并认为每一个弗协调逻辑都会有一个对偶的弗完全逻辑,反之亦然⑥。此后,阿贝尔(Abar)和雅玛施塔(Yamashita)对 P_1 补充了一些具有弗完全逻辑典型特征系统内的定理⑦。类似于弗协调逻辑,弗完全逻辑也具有容忍特定矛盾冲突的能力;菲尔德(Field)在《救真于悖》中对弗完全逻辑由于这种特性而在容忍悖论方面的应用价值给予了肯定⑧。

本文的主要目标是将弗完全逻辑的措施应用于模态逻辑,在系统 P_1 的基础上,建立具有弗完全逻辑特性的模态逻辑系统 P_1K,并证明其可靠性和完全性;P_1K 是目前第一个正加型弗完全模态逻辑系统,以 P_1 为基础可以扩充得到弗完全模

收稿日期:2022-01-23

基金项目:国家社会科学基金重大项目(18ZDA031)

作者简介:郝旭东(1974—),男,山东莘县人,副教授,研究方向为现代逻辑和逻辑哲学。

①da Costa N C A, Marconi, D A. "Note on paracomplete logic", *Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei*, 1986(80): 504.

②根据普利斯特和卢特雷的研究,弗协调逻辑大体而言有三个路径:正加型、相干型和弃合型,本文所讨论的弗完全模态逻辑属于正加型研究路径(见 Priest G, Routley R. "Introduction: paraconsistent logics", *Studia Logica*, (1983)44: 6-13)。

③Smolenov H. "Paraconsistency, Paracompleteness and Intentional Contradictions", *Bulletin of the Section of Logic*, 1983(121): 9.

④da Costa N C A, Marconi D. "A Note on Paracomplete Logic", *Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei*, 1986(80): 504-509.

⑤Loparić A, da Costa N C A. "Paraconsistency, Paracompleteness, and Valuation", *Logique et Analyse*, 1984(106): 119-131.

⑥Béziau J-Y. "The future of paraconsistent logic", *Logical Studies*, 1999(2): 1-17.

⑦Abar C A A P, Yamashita M. "On non-alethic logic", *Lecture Notes in Computer Science*, 1995(945): 339-347.

⑧Field H. *Saving truth from paradox*. Oxford University Press, 2008, pp. 231-241.

态逻辑系统 P_1D, P_1T, P_14 和 P_1G,这些系统也都具有可靠性和完全性。此外,本文还对弗完全逻辑模态逻辑的特殊逻辑性质进行了必要的解释和说明。例如,由于这些类型的模态逻辑具有弗完全的逻辑特性,因而它们也可以作为模态悖论的解决方案;由于还可以把必然算子解释为认知算子、道义算子和时间算子等,因此,弗完全模态逻辑也可以作为处理认知悖论、知识或信念的冲突、道义困境以及司法二难问题的基础逻辑。

二　弗完全模态逻辑的形式语言和形式语义

弗完全模态逻辑的形式语言,记作 L_0^M,是在系统 P_1 形式语言的基础上,通过附加模态算子而得到的。其公式定义如下:

$\alpha ::= p \mid \neg \mid \alpha \wedge \alpha \mid \alpha \vee \alpha \mid \alpha \to \alpha \mid \Box \alpha$

用 $Atom(L_0{}^M)$ 代表弗完全模态逻辑全体命题变元的集合,用 $Form(L_0{}^M)$ 代表所有公式的集合;并引入如下缩写定义:

(1) $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ 表示 $((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha))$;

(2) α^* 表示 $\alpha \vee \neg \alpha$;

(3) $\sim\alpha$, 即, $\neg^* \alpha$, 表示 $(\alpha \to (\beta \wedge \neg \beta))$。

(4) $\Diamond\alpha$,即, $\sim\Box\sim\alpha$。

弗完全模态逻辑系统的形式语义如下:

定义 1　框架 F 是一个二元组(W, R),其中 W 是可能世界的集合,R 是 W 上的二元关系。并且,

(1) 如果框架满足 $\forall w \exists w'(wRw')$,则称之为 P_1D-框架;

(2) 如果框架满足 $\forall w(wRw)$,则称之为 P_1T-框架;

(3) 如果框架满足 $\forall w_1 \forall w_2 \forall w_3(w_1Rw_2 \wedge w_2Rw_3 \Rightarrow w_1Rw_3)$ 和 $\forall w(wRw)$,则称之为 P_14-框架;

(4) 如果框架满足 $\forall w_1 \forall w_2 \forall w_3(w_1Rw_2 \wedge w_1Rw_3 \Rightarrow \exists w'(w_2Rw' \wedge w'Rw_3))$、$\forall w(wRw)$ 和 $\forall w_1 \forall w_2 \forall w_3(w_1Rw_2 \wedge w_2Rw_3 \Rightarrow w_1Rw_3)$,则称之为 P_1G-框架。

定义 2　框架上的一个赋值是从 $Form(L_0{}^M) \times W$ 到 $\{0, 1\}$ 的映射,并且对于任一 α、$\beta \in Form(L_0{}^M)$ 满足下列条件("$\Rightarrow$"的涵义为"如果……,那么……","$\Leftrightarrow$"的涵义为"当且仅当"):

(1) $V(\alpha, w) = 1 \Rightarrow V(\neg \alpha, w) = 0$;

(2) $V(\alpha, w) \neq V(\neg \alpha, w) \Rightarrow V(\neg \alpha, w) \neq V(\neg \neg \alpha, w)$;

(3) $V(\alpha^*, w) = V(\alpha \to \beta, w) = V(\alpha \to \neg \beta, w) = 1 \Rightarrow V(\alpha, w) = 0$;

(4) $V(\alpha \to \beta, w) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha, w) = 0$ 或 $V(\beta, w) = 1$;

(5) $V(\alpha \wedge \beta, w) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha, w) = 1$ 且 $V(\beta, w) = 1$;

(6) $V(\alpha \vee \beta, w) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha, w) = 1$ 或 $V(\beta, w) = 1$;

(7) $V(\alpha^*, w) = V(\beta^*, w) = 1 \Rightarrow V((\alpha \bullet \beta)^*, w) = V((\bigcirc \alpha)^*, w) = 1$,其中 $\bullet \in \{\wedge, \vee, \to\}$, $\bigcirc \in \{\neg, \Box\}$;

(8) $V(\neg(\alpha \wedge \neg \alpha), w) = 1$;

(9) $V(\Box\alpha, w) = 1 \Leftrightarrow \forall w' \in W(wRw' \Rightarrow V(\alpha, w') = 1)$。

定义 3　模型 M 是一个三元组(W, R, V),其中(W, R)是框架 F,V 是 F 上的一个赋值。

定义 4　令 M=(W, R, V)是任意一个模型,F=(W, R)是任意一个框架,α 为 $Form(L_0{}^M)$ 中的任意一个公式,w 为 W 中的任一可能世界:

(1)若 $V(\alpha, w) = 1$,则称 α 在 w 上为真,记作 $M \models_w \alpha$;若 $V(\alpha, w) = 0$,则称 α 在 w 上为假,记作 $M \not\models_w \alpha$。

(2) α 在模型 M 中是可满足的,当且仅当,存在某一 $w \in W$ 使得 $V(\alpha, w) = 1$。

(3) α 在模型 M 中是有效的,当且仅当,对于任一 $w \in W$ 有 $V(\alpha, w) = 1$。

(4) α 在框架 F 上是有效的,当且仅当,对于任一(W, R)上的赋值 V 有 $V(\alpha, w) = 1$。

(5)令 $\boldsymbol{F}$ 是任一框架类,称 α 在 $\boldsymbol{F}$ 上是有效的,当且仅当,对于任一 $F \in \boldsymbol{F}$,α 在 F 上是有效的,并将之记作 $\boldsymbol{F} \models \alpha$。公式 α 是 X-有效的,当且仅当,α 在框架类 X-$\boldsymbol{F}$ 上是有效的。

(6)令 $\boldsymbol{M}$ 是任一模型类,称 α 在 $\boldsymbol{M}$ 中是有效的,当且仅当,对于任一 $M \in \boldsymbol{M}$,α 在 $\boldsymbol{M}$ 中是有效的,并将之记作 $\boldsymbol{M} \models \alpha$。

三　弗完全模态逻辑系统 P_1K

弗完全模态逻辑系统 P_1K 的公理模式是在

P_1 公理模式①的基础上,通过增加关于模态算子的公理并给出一定的限制措施而得到。具体如下:

A(1) $\alpha\to(\beta\to\alpha)$

A(2) $(\alpha\to\beta)\to(\alpha\to(\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\gamma))$

A(3) $\alpha\to(\beta\to\alpha\wedge\beta)$

A(4) $\alpha\wedge\beta\to\alpha$

A(5) $\alpha\wedge\beta\to\beta$

A(6) $(\alpha\to\gamma)\to((\beta\to\gamma)\to(\alpha\vee\beta\to\gamma))$

A(7) $\alpha\to\alpha\vee\beta$

A(8) $\beta\to\alpha\vee\beta$

A(9) $((\alpha\to\beta)\to\alpha)\to\alpha$

A(10) $\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)$

A(11) $\alpha\to\neg\neg\alpha$

A(12) $\alpha\to(\neg\alpha\to\beta)$

A(13) $\alpha^{*}\to((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to\neg\beta)\to\neg\alpha))$

A(14) $\alpha^{*}\wedge\beta^{*}\to(\alpha\wedge\beta)^{*}\to(\alpha\vee\beta)^{*}\to(\alpha\to\beta)^{*}$

A(15) $\alpha^{*}\to(\neg\alpha)^{*}$

A(16) $\alpha^{*}\to(\Box\alpha)^{*}$

A(17) $\Box(\alpha\to\beta)\to(\Box\alpha\to\Box\beta)$

弗完全模态逻辑系统 P_1K 的推理规则如下:

R1(分离规则 MP):由 α 和 $\alpha\to\beta$ 可推出 β;

R2(必然化规则 N):由 α 可推出 $\Box\alpha$。

定义 5　称公式 α 在 P_1K 中是由公式集 Γ(形式)可推演的,记作 $\Gamma\vdash_{P1k}\alpha$(简记为 $\Gamma\vdash\alpha$),当且仅当,存在一个有穷的公式序列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 使得 $\alpha_m=\alpha$,并且对于任一的 $j(1\leqslant j\leqslant m)$,$\alpha_j$ 满足下列条件之一:

① α_j 是 P_1K 的公理之一;

② 存在小于 j 的 i 和 k 使得 α_j 可以从 α_i 和 $\alpha_k(\alpha_k=\alpha_i\to\alpha_j)$ 利用分离规则而得到;

③ 存在小于 j 的 i 使得 $\alpha_j(=\Box\alpha_i)$ 是从 α_i 利用必然化规则得到的;

④ $\alpha_j\in\Gamma$。

特别地,当 $\Gamma=\emptyset$,则称公式 α 在 P_1K 中是可证的,记作 $\vdash_{P1K}\alpha$,简记为 $\vdash\alpha$。

由 P_1K 的公理模式和形成规则可知,系统 P_1 是包含于 P_1K 的子系统。因此,P_1-定理也都是 P_1K-定理。

令 Γ 是一个有限公式集 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_h\}$,则 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_h\}\vdash\alpha$ 可简记为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_h\vdash\alpha$,并且 $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\alpha$ 可简记为 $\Gamma, \alpha\vdash\alpha$。

定义 6　P_1-变形

令 α 是任意公式,α 的 P_1-变形记作 α',是删去 α 中所有模态算子后得到的公式。严格地讲,P_1-变形是一个从公式到公式的映射:

(1) $(\neg\alpha)'=\neg\alpha'$

(2) $(\alpha\wedge\beta)'=\alpha'\wedge\beta'$

(3) $(\alpha\vee\beta)'=\alpha'\vee\beta'$

(4) $(\alpha\to\beta)'=\alpha'\to\beta'$

(5) $(\Box\alpha)'=\alpha'$

推论 1　任一 P_1K-定理的 P_1-变形都是 P_1-定理。

证明:一个公式是 P_1K-定理,当且仅当,存在该公式的 P_1K-证明。施归纳于证明长度即可。该推论是说,若 α 是 P_1K-定理,则 α' 是 P_1-定理;若 α' 不是 P_1-定理,则 α 不是 P_1K-定理。

定理 1　$\vdash\alpha\to\alpha$

定理 2　在 P_1K 中有:

(1)若 $\alpha\in\Gamma$,则 $\Gamma\vdash\alpha$;

(2)若 $\Gamma\vdash\alpha$ 且 $\Gamma\subseteq\Delta$,则 $\Delta\vdash\alpha$;

(3)若 $\Delta\vdash\alpha$ 且 $\Delta\vdash\alpha\to\beta$,则 $\Delta\vdash\beta$;

(4)若 $\Gamma\vdash\alpha$ 且 $\Delta, \alpha\vdash\beta$,则 $\Gamma, \Delta\vdash\beta$。

定理 3　在 P_1K 中有:

(1)若 $\Gamma_1\vdash\alpha$,$\Gamma_2\vdash\alpha\to\beta$,并且 $\Gamma_1, \Gamma_2\subseteq\Delta$,则 $\Delta\vdash\beta$。特别地,

当 $\Gamma_1=\emptyset$ 时,若有 $\vdash\alpha$,$\Gamma_2\vdash\alpha\to\beta$,并且 $\Gamma_2\subseteq\Delta$,则有 $\Delta\vdash\beta$;

当 $\Gamma_2=\emptyset$ 时,若有 $\Gamma_1\vdash\alpha$,$\vdash\alpha\to\beta$,并且 $\Gamma_1\subseteq\Delta$,则有 $\Delta\vdash\beta$。

(2)若 $\Gamma\vdash\alpha_1\to\alpha_2$, $\Gamma\vdash\alpha_2\to\alpha_3$, $\cdots$, $\Gamma\vdash\alpha_{m-1}\to\alpha_m$,则 $\Gamma\vdash\alpha_1\to\alpha_m$;

(3) $\Gamma\vdash\alpha\wedge\beta$ 当且仅当 $\Gamma\vdash\alpha$ 并且 $\Gamma\vdash\beta$;

(4)若 $\Gamma\vdash\alpha$,则 $\Gamma\vdash\alpha\vee\beta$ 并且 $\Gamma\vdash\beta\vee\alpha$;

(5)若 $\Gamma, \alpha\vdash\gamma$ 并且 $\Gamma, \beta\vdash\gamma$,则 $\Gamma, \alpha\vee\beta\vdash\gamma$。

(6)若 $\Gamma, \alpha\vdash\beta$,则 $\Gamma\vdash\alpha\to\beta$。(演绎定理)

(7)若 $\Gamma\vdash\beta^{o}$,且有 $\Gamma, \alpha\vdash\beta$,$\Gamma, \alpha\vdash\neg\beta$,则 $\Gamma\vdash\neg\alpha$。

证明:由于定理 1 到定理 3 都是系统 P_1 的定

①郝旭东,张建军:《弗完全逻辑 P_1 的可判定性及其容忍悖论的逻辑机制》,《四川师范大学学报(社会科学版)》2015 年第 1 期。

理,并且 P_1K 是 P_1 的扩充,因而这些定理也都是系统 P_1K 的定理。

定理4　在 P_1K 中有:

(1)$\vdash\alpha\to\beta\Rightarrow\vdash\Box\alpha\to\Box\beta$;$\vdash\alpha\to\beta\Rightarrow\vdash\Diamond\alpha\to\Diamond\beta$;

(2)$\vdash\alpha\leftrightarrow\beta\Rightarrow\vdash\Box\alpha\leftrightarrow\Box\beta$;$\vdash\alpha\leftrightarrow\beta\Rightarrow\vdash\Diamond\alpha\leftrightarrow\Diamond\beta$;

(3)$\vdash\Diamond\sim\alpha\leftrightarrow\sim\Box\alpha$;

证明:类似于模态逻辑中的证明,略。

定理5　在 P_1K 中有:

(1)$\vdash\alpha\not\Rightarrow\vdash\Box\alpha$;

(2)$\vdash\alpha^*\not\Rightarrow\vdash(\Box\alpha)^*$。

(1)的证明:类似于模态逻辑中的证明,略。

(2)的证明:因为$\vdash\alpha^*$,那么存在一个有穷公式序列 α_1, …, α_m 使得 $\alpha_m=\alpha^*$;并且对于任一的 $i(1\leqslant i\leqslant m)$,$\alpha_i$ 满足下列条件之一:

① α_i 为 P_1K 的公理之一;

② 有小于 i 的 j 和 k 使得 α_i 可以从 α_j 和 α_k $(=\alpha_j\to\alpha_i)$利用R1得到的;

③ 有小于 i 的 j 使得 α_i 是 α_j 利用R2得到的。

由 $\alpha_m(=\alpha^*)$,根据公理A(16)$(\alpha^*\to(\Box\alpha)^*)$,使用R1,可得$(\Box\alpha)^*$。

因此,公式序列 α_1, …, α_m, $(\Box\alpha)^*$ 就是$\vdash(\Box\alpha)^*$的一个证明。

推论2　以下公式不是 P_1K-定理:

(1)$\Box(\alpha\vee\neg\alpha)$

(2)$\Box\alpha\vee\Box\neg\alpha$

(3)$\Box\alpha\vee\neg\Box\alpha$

(4)$\Diamond(\alpha\vee\neg\alpha)$

(5)$\Diamond\alpha\vee\Diamond\neg\alpha$

(6)$\Diamond\alpha\vee\neg\Diamond\alpha$

(7)$\alpha\to\Box(\beta\vee\neg\beta)$

(8) $\alpha\to\Box\beta\vee\Box\neg\beta$

(9) $\alpha\to\Box\beta\vee\neg\Box\beta$

(10) $\alpha\to\Diamond(\beta\vee\neg\beta)$

(11)$\alpha\to\Diamond\beta\vee\Diamond\neg\beta$

(12) $\alpha\to\Diamond\beta\vee\neg\Diamond\beta$

(13)$\Box(\alpha\leftrightarrow\neg\alpha)\to\beta$

(14)$(\Box\alpha\leftrightarrow\Box\neg\alpha)\to\beta$

(15)$(\Box\alpha\leftrightarrow\neg\Box\alpha)\to\beta$

(16)$\Diamond(\alpha\leftrightarrow\neg\alpha)\to\beta$

(17)$(\Diamond\alpha\leftrightarrow\Diamond\neg\alpha)\to\beta$

(18)$(\Diamond\alpha\leftrightarrow\neg\Diamond\alpha)\to\beta$

证明:首先,(1)$\Box(\alpha\vee\neg\alpha)$不是 P_1K-定理。对其做 P_1-变形,可得 $\alpha\vee\neg\alpha$;由于公式 $\alpha\vee\neg\alpha$ 不是 P_1-定理,根据推论1,可知$\Box(\alpha\vee\neg\alpha)$不是 P_1K-定理。其次,同理可得,其它公式也都不是 P_1K-定理。因此,各种版本的模态排中律在弗完全模态逻辑 P_1K 中不是定理。

定理6　P_1K 公理模式(1)—(17)在任意框架上有效。

证明:首先,根据赋值定义2和定义4易证,略。

定理7　令 $\boldsymbol{F}$ 是任一框架类,则有:

(1)若 α, $\alpha\to\beta$ 在 $\boldsymbol{F}$ 上有效,则 β 在 $\boldsymbol{F}$ 上有效;

(2)若 α 在 $\boldsymbol{F}$ 上有效,则$\Box\alpha$ 在 $\boldsymbol{F}$ 上有效。

证明:类似于模态逻辑中的证明,略。

定理8　P_1K 是可靠的,即:如果$\vdash_{P1K}\alpha$,那么$\models_{P1K}\alpha$。

证明:根据定理6和定理7,施归纳于证明长度即可。

定义7

(1)对任意公式集 $\Gamma\subseteq Form(L_0^M)$,$\overline{\Gamma}=\{\alpha\in Form(L_0^M):\Gamma\vdash\alpha\}$,若$\overline{\Gamma}=\Gamma$,则称 Γ 演绎封闭的。

(2)称 Γ 为不足道的,当且仅当,$\overline{\Gamma}=Form(L_0^M)$;否则,称之为足道的。

(3)称 Γ 是不协调的,当且仅当,有公式 α 使得 $\Gamma\vdash\alpha$ 且 $\Gamma\vdash\neg\alpha$;否则,就称 Γ 是协调的;无限集 Γ 是协调的,当且仅当,其任何一个有限子集都是协调的。

(4)称一协调集 Γ 是极大的,当且仅当,对任意公式 α,若 $\alpha\notin\Gamma$ 则 $\Gamma\cup\{\alpha\}$ 是不协调的。

引理1　令 $\Gamma\subseteq Form(L_0^M)$ 且 $\alpha\in Form(L_0^M)$。那么,

(1)如果有 $\Gamma\vdash\alpha\wedge\sim\alpha$,那么有 Γ 是不协调的;

(2)如果 Γ 是不协调的,那么存在公式 α 使得 $\Gamma\vdash\alpha\wedge\sim\alpha$;

(3)$\Gamma\vdash\alpha$,当且仅当,$\Gamma\cup\{\sim\alpha\}$是不协调的;

(4)如果 Γ 是极大协调的且 $\alpha\notin\Gamma$,那么 $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\alpha\wedge\sim\alpha$;

(5)如果 Γ 是极大协调的且 $\alpha\notin\Gamma$,那么 $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\neg\alpha$。

引理2　若 Γ 是极大协调的,$\Gamma\subseteq Form$

(L_0^M),$\alpha,\beta\in Form(L_0^M)$,则:

(1)$\Gamma\vdash\alpha$,当且仅当,$\alpha\in\Gamma$;

(2)若$\alpha\in\Gamma$,则$\sim\alpha\notin\Gamma$;若$\sim\alpha\in\Gamma$,则$\alpha\notin\Gamma$;

(3)$\alpha\in\Gamma$或$\sim\alpha\in\Gamma$;

(4)若$\vdash\alpha$,则$\alpha\in\Gamma$;

(5)若$\alpha,\alpha^*\in\Gamma$,则$\neg\alpha\notin\Gamma$;若$\neg\alpha,\alpha^*\in\Gamma$,则$\alpha\notin\Gamma$;

(6)若$\alpha\in\Gamma$,$\alpha\to\beta\in\Gamma$,则$\beta\in\Gamma$;

(7)若$\alpha^*\in\Gamma$,则$\alpha\notin\Gamma$或$\neg\alpha\notin\Gamma$;

(8)若$\alpha^*\in\Gamma$,则$(\neg\alpha)^*\in\Gamma$。

引理3 如果Γ是极大协调的,那么:

(1)若$\alpha\in\Gamma$,则$\neg\alpha\notin\Gamma$;

(2)若$\alpha\in\Gamma$且$(\neg\alpha)\notin\Gamma$,则$(\neg\neg\alpha)\in\Gamma$;若$\alpha\notin\Gamma$且$(\neg\alpha)\in\Gamma$,则$(\neg\neg\alpha)\notin\Gamma$;

(3)若α^*,$(\alpha\to\beta)$,$(\alpha\to\neg\beta)\in\Gamma$,则$\alpha\notin\Gamma$;

(4)$\alpha\to\beta\in\Gamma$,当且仅当,$\alpha\notin\Gamma$或$\beta\in\Gamma$;

(5)$\alpha\wedge\sim\beta\in\Gamma$,当且仅当,$\alpha\in\Gamma$且$\beta\in\Gamma$;

(6)$\alpha\vee\beta\in\Gamma$,当且仅当,$\alpha\in\Gamma$或$\beta\in\Gamma$;

(7)若$\alpha^*,\beta^*\in\Gamma$,则$(\alpha\to\beta)^*$,$(\alpha\wedge\sim\beta)^*$,$(\alpha\vee\beta)^*$,$(\neg\alpha)^*\in\Gamma$;

(8)$\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)\in\Gamma$。

证明:引理1(1)到3(6)都是P_1-定理,因而也都是P1K-定理;下面证明定理3的(7)和(8)——

首先,证明(7)是P_1K-定理:

① $\alpha^*,\beta^*\in\Gamma$, i.e., $\alpha^*\wedge\beta^*\in\Gamma$ (假定)

② $\Gamma\vdash\alpha^*\wedge\beta^*$ (①,定理2(1))

③ $\vdash\alpha^*\wedge\beta^*\to(\alpha\wedge\beta)^*\wedge(\alpha\vee\beta)^*\wedge(\alpha\to\beta)^*$ (公理(14))

④ $\Gamma\vdash(\alpha\wedge\beta)^*\wedge(\alpha\vee\beta)^*\wedge(\alpha\to\beta)^*$ (③,定理2(2))

⑤ $(\alpha\wedge\beta)^*\wedge(\alpha\vee\beta)^*\wedge(\alpha\to\beta)^*\in\Gamma$ (④,引理2(1))

⑥ $(\alpha\wedge\beta)^*$,$(\alpha\vee\beta)^*$,$(\alpha\to\beta)^*\in\Gamma$ (⑤,引理3(5))

类似地,根据公理(15)和(16)易证(7)的其余部分。

其次,证明(8)是P_1K-定理:

① $\vdash\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)$ (公理(10))

② $\Gamma\vdash\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)$ (①,定理2(2))

③ $\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)\in\Gamma$ (②,引理2(1))

引理4 (极大协调集扩充引理)任一协调集都可以扩充成极大协调集。

证明:令Γ是一个协调的集合,并且令“$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\cdots$”是$Form(L_0^M)$中所有公式的一个排列,定义集合序列“$\Gamma_0,\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_k,\cdots$”如下:

$\Gamma_0=\Gamma$;

$$\Gamma_{k+1}=\begin{cases}\Gamma_k\cup\{\alpha_k\}, & \text{若}\ \Gamma_k\cup\{\alpha_k\}\ \text{是一个协调集}\\ \Gamma_k\cup\{\sim a_k\}, & \text{否则}\end{cases}$$

令$\Gamma'=\cup\{\Gamma_k\mid k\in\omega\}$,即,$\Gamma'$是所有$\Gamma_k$的并;显然有$\Gamma\subseteq\Gamma'$。

首先,证明$\Gamma'(\cup\{\Gamma_k\mid k\in\omega\})$是协调的。

任取Γ'的一个有限子集Λ,即,有限集$\Lambda\subseteq\Gamma'$;在Λ中找到一个下标最大的公式;然后,在有限集Λ中,取出下标最大的公式,并将之记为α_m;于是,可以将Λ记为$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$;此时,按照$\Gamma_m$的构造方式,一定有$\alpha_m\in\Gamma_m$;由于,$\Gamma_m=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-2},\alpha_{m-1}\}\cup\{\alpha_m\}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-2},\alpha_{m-1},\alpha_m\}$,即$\Gamma_m$包含$\alpha_m$之前的所有公式;所以,$\Lambda\subseteq\Gamma_m$;因为$\Lambda'=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$,其中下标最大的$\alpha_m\in\Gamma_m$,所以下标小的$\alpha_i\in\Gamma_m(1\leqslant i<m)$;又因,$\Gamma_m\subseteq\Gamma'$,所以有$\Lambda\subseteq\Gamma'$;由于有限集$\Gamma_m$是协调的,根据有限集的协调性定义,$\Gamma_m$的有限子集$\Lambda$也是协调的;因为$\Lambda$的任意性,所以有:任取$\Gamma'$的一个有限子集$\Lambda$都是协调的;根据无限集的协调性定义,因此,就有无限集Γ'是协调的。

其次,证明协调集$\Gamma'(\cup\{\Gamma_k\mid k\in\omega\})$是极大的。对于任一$\alpha_k\notin\Gamma'$(即,$\alpha_k\notin\cup\{\Gamma_k\mid k\in\omega\}$),根据极大协调集的定义,需要证明$\Gamma'\cup\{\alpha_k\}$是不协调的;于是,只需表明其子集$\Gamma_{k+1}\cup\{\alpha_k\}$是不协调的。根据$\Gamma_{k+1}$的定义,有$\Gamma_{k+1}=\Gamma_k\cup\{\sim\alpha_k\}$;因此,易得$\Gamma_k\cup\{\sim\alpha_k\}\cup\{\alpha_k\}$是不协调的;即,$\Gamma_{k+1}\cup\{\alpha_k\}$是不协调的。因此,$\Gamma'\cup\{\alpha_k\}$也是不协调的。因此,协调集$\Gamma'(\cup\{\Gamma_k\mid k\in\omega\})$是极大的。

所以,任一协调集都可以扩充成极大协调集。

令max是由全体极大协调集组成的集合。更一般地,对于任一公式集Γ,令maxΓ是由全体包含Γ的极大协调集组成的集合,记作$\max\Gamma=\{X\in\max:\Gamma\subseteq X\}$。显然,当公式集Γ为空集时,$\max\Gamma=\max$;并且,由极大协调集扩充引理可知,当公式集Γ为协调集时,maxΓ不会是空集。

引理5 $\Gamma\vdash\alpha$,当且仅当,α是maxΓ中任一极大协调集的元素,即,$\forall X\in\max\Gamma(\alpha\in X)$,特别地,当$\Gamma=\emptyset$时,$\vdash\alpha$,当且仅当,$\alpha$是任意一个极大

协调集的元素。

证明：

首先，有

$\Gamma\vdash\alpha \Rightarrow \forall X\in \max\Gamma(X\vdash\alpha)$ （定理2(2)）

$\Rightarrow \forall X\in \max\Gamma(\alpha\in X)$ （引理2(1)）

其次，有

$\Gamma\nvdash\alpha \Rightarrow \Gamma\cup\{\sim\alpha\}$是协调的 （引理1(3)）

$\Rightarrow$① $\exists X\in \max\Gamma(\Gamma\cup\{\sim\alpha\}\subseteq X)$（引理4）

$\Rightarrow$② $\exists X\in \max\Gamma(\sim\alpha\in X)$ （①）

$\Rightarrow$③ $\exists X\in \max\Gamma(\alpha\notin X)$ （引理2(2)）

所以，就有 $\Gamma\vdash\alpha \Leftrightarrow \forall X\in \max\Gamma(\alpha\in X)$。

因此，当$\Gamma=\emptyset$时，即有$\vdash\alpha \Leftrightarrow \forall X\in \max\Gamma(\alpha\in X)$，即，公式$\alpha$是一个定理，当且仅当，$\alpha$是任意一个极大协调集的元素。

定义8 一个典范模型是$\underset{\cdot}{M}=(\underset{\cdot}{W},\underset{\cdot}{R},\underset{\cdot}{V})$，其中

$\underset{\cdot}{W}=\max$;

$X\ \underset{\cdot}{R}\ Y \Leftrightarrow \{\alpha\in Form(L_0{}^M):\Box\alpha\in X\}\subseteq Y$;

$$\underset{\cdot}{V}(\alpha,X)=\begin{cases}1,\text{当 } \alpha\in X \text{ 时;}\\ 0,\text{当 } \alpha\notin X \text{ 时。}\end{cases}$$

于是，则有：

$X\ \underset{\cdot}{R}\ Y \Leftrightarrow \{\alpha\in Form(L_0{}^M):\Box\alpha\in X\}\subseteq Y$;

$\Leftrightarrow \{\Diamond\alpha\in Form(L_0{}^M):\alpha\in Y\}\subseteq X$。

引理6 $\underset{\cdot}{F}=(\underset{\cdot}{W},\underset{\cdot}{R})$是一个$P_1K$-框架。

证明：为证 $\underset{\cdot}{F}=(\underset{\cdot}{W},\underset{\cdot}{R})$是一个$P_1K$-框架，只需证任意典范框架都是$P_1K$-框架，即证所有的$P_1K$-定理在任意典范框架上有效。首先，由定义2易验证，所有P_1K-公理在任一典范框架上有效。其次，由定理7，可知分离规则和必然化规则在任意典范框架上有效。因此，任一典范框架都是P_1K-框架；即，$\underset{\cdot}{F}=(\underset{\cdot}{W},\underset{\cdot}{R})$是一个$P_1K$-框架。

引理7 $\underset{\cdot}{M}=(\underset{\cdot}{W},\underset{\cdot}{R},\underset{\cdot}{V})$是一个$P_1K$-模型。

证明：由引理6可知，$\underset{\cdot}{F}=(\underset{\cdot}{W},\underset{\cdot}{R})$是一个$P_1K$-框架。引理3保证$\underset{\cdot}{V}$满足赋值定义2的(1)—(8)。下面验证$\underset{\cdot}{V}$满足赋值定义2的(9)：

① $\underset{\cdot}{V}(\Box\alpha,X)=1$ （假设）

$\Leftrightarrow \Box\alpha\in X$ （$\underset{\cdot}{V}$的定义）

$\Rightarrow \forall X'\in\underset{\cdot}{W}(X\ \underset{\cdot}{R}\ X'\Rightarrow\alpha\in X')$ （$\underset{\cdot}{R}$的定义）

$\Rightarrow \forall X'\in\underset{\cdot}{W}(X\ \underset{\cdot}{R}\ X'\Rightarrow\underset{\cdot}{V}(\alpha,X')=1)$

（$\underset{\cdot}{V}$的定义）

② $\forall X'\in\underset{\cdot}{W}(X\ \underset{\cdot}{R}\ X'\Rightarrow\underset{\cdot}{V}(\alpha,X')=1)$（假设）

$\Rightarrow \forall X'\in\underset{\cdot}{W}(X\ \underset{\cdot}{R}\ X'\Rightarrow\alpha\in X')$ （$\underset{\cdot}{V}$的定义）

$\Rightarrow \forall X'\in\underset{\cdot}{W}(\{\beta:\Box\beta\in X\}\subseteq X'\Rightarrow\alpha\in X')$

（$\underset{\cdot}{R}$的定义）

$\Rightarrow \{\beta:\Box\beta\in X\}\vdash\alpha$ （引理5）

$\Rightarrow$X中有$\Box\beta_1,\cdots,\Box\beta_p$，使得

$\vdash\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_p\rightarrow\alpha$ （Γ-可推演定义）

$\Rightarrow$X中有$\Box\beta_1,\cdots,\Box\beta_p$，使得

$\vdash\Box\beta_1\wedge\cdots\wedge\Box\beta_p\rightarrow\Box\alpha$ （定理4(1)）

已知$\Box\beta_1,\cdots,\Box\beta_p\in X$，根据引理3(5)则有$\Box\beta_1\wedge\cdots\wedge\Box\beta_p\in X$

$\Rightarrow \Box\alpha\in X$ （引理2(6)）

$\Rightarrow \underset{\cdot}{V}(\Box\alpha,X)=1$ （$\underset{\cdot}{V}$的定义）

由①和②可得，$\underset{\cdot}{V}(\Box\alpha,X)=1 \Leftrightarrow \forall X'\in\underset{\cdot}{W}(X\ \underset{\cdot}{R}\ X'\Rightarrow\underset{\cdot}{V}(\alpha,X')=1)$，因此，$\underset{\cdot}{V}$满足赋值定义2(9)。所以，$\underset{\cdot}{M}=(\underset{\cdot}{W},\underset{\cdot}{R},\underset{\cdot}{V})$是$P_1K$-模型。

定理9 P_1K是完全的；即，若$\vDash_{P1K}\alpha$，则$\vdash_{P1K}\alpha$。

设$\vDash_{P_1K}\alpha$，即令，α是P_1K-有效的，则有

α在任意一个P_1K-框架上有效

（框架类有效定义）

$\Rightarrow\alpha$在任意一个P_1K-模型上有效

（模型类为真定义）

$\Rightarrow\alpha$在$\underset{\cdot}{M}$中为真 （$\underset{\cdot}{M}$是P_1K-模型）

$\Rightarrow \forall X\in\max(\underset{\cdot}{V}(\alpha,X)=1)$

（模型为真定义）

$\Rightarrow \forall X\in\max(\alpha\in X)$ （$\underset{\cdot}{V}$的定义）

$\Rightarrow\vdash_{P1k}\alpha$ （引理5）

四 弗完全模态逻辑系统P_1K的扩充及其逻辑特性

（一）弗完全模态逻辑系统P_1D

P_1D的公理模式如下：

(1)P_1K的全部公理(模式)；

(2)A(18) $\Box\alpha\rightarrow\Diamond\alpha$。

定理10 P_1D是可靠的，即：如果$\vdash_{P1D}\alpha$，那么$\vDash_{P1D}\alpha$。

证明：由于 P_1D 的全部公理模式包括其模态特征公理 A18 在 P_1D-框架上有效，且其推理规则在任一框架类上有效，易得系统 P_1D 是可靠的。

引理 8　$\underset{\cdot}{F}=(\underset{\cdot}{W},\underset{\cdot}{R})$ 是一个 P_1D-框架。

证明：证 $\underset{\cdot}{F}$ 是一个 P_1D-框架，也即是要证 $\underset{\cdot}{F}$ 是一个持续框架，只需证 $\underset{\cdot}{F}$ 满足：$\forall X(X\in\underset{\cdot}{W})\Rightarrow\exists X'(X\,\underset{\cdot}{R}\,X')$，这等价于需证：$\forall X(X\in\underset{\cdot}{W})\Rightarrow\exists X'(\{\alpha:\Box\alpha\in X\}\subseteq X')$。

如果 $\{\alpha:\Box\alpha\in X\}$ 是协调的，那么根据极大协调集扩充引理，它总是可以扩充为一个极大协调集。设该极大协调集为 Γ，Γ 属于极大协调集的集合 max（即 $\Gamma\in\underset{\cdot}{W}$），并且协调集 $\{\alpha:\Box\alpha\in X\}$ 又总是 $\subseteq\Gamma$，所以就可以将 Γ 视为 X'。

因此，只需证：$\{\alpha:\Box\alpha\in X\}$ 是协调的。

下面，证明 $\{\alpha:\Box\alpha\in X\}$ 是协调的。

给定前提 $X\in\underset{\cdot}{W}$ 和公式集 $\{\alpha:\Box\alpha\in X\}$，假设 $\{\alpha:\Box\alpha\in X\}$ 是不协调的，则

$\{\alpha:\Box\alpha\in X\}$ 中有公式集 $\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$ 使得

$\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_m\vdash\gamma\wedge\sim\gamma$　　　　（引理 1(2)）

$\Rightarrow\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_m\vdash\gamma$ 且 $\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_m\vdash\sim\gamma$　　　　（定理 3(3)）

$\Rightarrow\vdash\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_m\rightarrow\gamma$ 且 $\vdash\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_m\rightarrow\sim\gamma$　　　　（演绎定理）

$\Rightarrow\vdash\Box\beta_1\wedge\cdots\wedge\Box\beta_m\rightarrow\Box\gamma$ 且 $\vdash\Box\beta_1\wedge\cdots\wedge\Box\beta_m\rightarrow\Box\sim\gamma$　　　　（定理 4(1)）

再由前提 $\Box\beta_1,\cdots,\Box\beta_m\in X$，根据引理 3(5)，则有

$\Box\beta_1\wedge\cdots\wedge\Box\beta_m\in X$

$\Rightarrow\Box\gamma\in X$ 且 $\Box\sim\gamma\in X$　　　　（引理 2(6)）

$\Rightarrow\Diamond\sim\gamma\in X$　　　　（公理 A(18)，引理 2(6)）

$\Rightarrow\sim\Box\gamma\in X$　　　　（定理 4(3)）

因为 X 中同时有公式 $\Box\gamma$ 和公式 $\sim\Box\gamma$，根据引理 1(1) 易得，X 是不协调的，即 $X\notin\underset{\cdot}{W}$，而 $X\in\underset{\cdot}{W}$ 是给定的前提。因此，假设错误。于是，$\{\alpha:\Box\alpha\in X\}$ 是协调的。所以，$\underset{\cdot}{F}$ 是一个持续框架，即，$\underset{\cdot}{F}=(\underset{\cdot}{W},\underset{\cdot}{R})$ 是一个 P_1D-框架。

引理 9　$\underset{\cdot}{M}=(\underset{\cdot}{W},\underset{\cdot}{R},\underset{\cdot}{V})$ 是一个 P_1D-模型。

证明：由引理 8 可知，$\underset{\cdot}{F}=(\underset{\cdot}{W},\underset{\cdot}{R})$ 是一个 P_1D-框架；又由引理 7 可知 $\underset{\cdot}{V}$ 满足赋值定义的(1)—(9)。所以，$\underset{\cdot}{M}$ 是一个 P_1D-模型。

定理 11　P_1D 是完全的，即：若 $\models_{p1D}\alpha$，则 $\vdash_{p1D}\alpha$。

证明：类似于定理 9 的证明，略。

（二）弗完全模态逻辑 P_1T

P_1T 是在 P_1K 的基础上，通过增加模态公理 A(19) $\Box\alpha\rightarrow\alpha$ 得到的。

P_1T 的公理模式如下：

(1) P_1K 的全部公理模式；

(2) A(19)　$\Box\alpha\rightarrow\alpha$。

定理 12　P_1T 是可靠的，即：如果 $\vdash_{P1T}\alpha$，那么 $\models_{P1T}\alpha$。

证明：由于 P_1T 的全部公理（模式）包括其模态特征公理 A(19) 在 P_1T-框架上有效，且其推理规则在任一框架类上有效，易得系统 P_1T 是可靠的。

引理 10　$\underset{\cdot}{F}=(\underset{\cdot}{W},\underset{\cdot}{R})$ 是一个 P_1T-框架。

证明：证 $\underset{\cdot}{F}$ 是一个 P_1T-框架，也即是要证明 $\underset{\cdot}{F}$ 是一个自返框架，

只需证 $\underset{\cdot}{F}$ 满足：$\forall X\in\underset{\cdot}{W}(X\,\underset{\cdot}{R}\,X)$，

这等价于需证：$\forall X\in\underset{\cdot}{W}(\{\alpha:\Box\alpha\in X\}\subseteq X)$。

给定前提 $X\in\underset{\cdot}{W}$ 和公式集 $\{\alpha:\Box\alpha\in X\}$，设任意公式 $\beta\in\{\alpha:\Box\alpha\in X\}$，

根据定理 2(1)，可得 $\{\alpha:\Box\alpha\in X\}\vdash\beta$；再根据定理 5(1)，可得 $\{\alpha:\Box\alpha\in X\}\vdash\Box\beta$，于是可得 $\Box\beta\in X$；由公理 A(19)，可得 $\vdash\Box\beta\rightarrow\beta$；所以根据引理 2(6)，可得 $\beta\in X$；因为 β 的任意性，因此 $\{\alpha:\Box\alpha\in X\}\subseteq X$。所以，$\underset{\cdot}{F}$ 是一个自返框架，也即，$\underset{\cdot}{F}=(\underset{\cdot}{W},\underset{\cdot}{R})$ 是一个 P_1T-框架。

引理 11　$\underset{\cdot}{M}=(\underset{\cdot}{W},\underset{\cdot}{R},\underset{\cdot}{V})$ 是一个 P_1T-模型。

证明：由引理 10 可知，$\underset{\cdot}{F}=(\underset{\cdot}{W},\underset{\cdot}{R})$ 是一个 P_1T-框架；又由引理 7 可知 $\underset{\cdot}{V}$ 满足赋值定义的(1)—(9)。所以，$\underset{\cdot}{M}$ 是一个 P_1T-模型。

定理 13　P_1T 是完全的，即：若 $\models_{P1T}\alpha$，则 $\vdash_{P1T}\alpha$。

证明：类似于定理 9 的证明，略。

（三）弗完全模态逻辑系统 P_14

P_14 是在 P_1T 的基础上，通过增加模态公理

(A5)$\Box\alpha\to\Box\Box\alpha$ 得到的。

$P_1 4$ 的公理模式如下:

(1)$P_1 T$ 的全部公理(模式);

(2)A(20) $\Box\alpha\to\Box\Box\alpha$。

定理 14 $P_1 4$ 是可靠的,即:如果$\vdash_{P_1 4}\alpha$,那么$\models_{P_1 4}\alpha$。

证明:

由于 $P_1 4$ 的全部公理(模式)包括其特征公理 A(20)在 $P_1 4$-框架上有效,且其推理规则在任一框架类上有效,易得系统 $P_1 4$ 是可靠的。

引理 12 $\dot{F}=(\dot{W},\ \dot{R})$是一个 $P_1 4$-框架。

证明:

证 $\dot{F}$ 是一个 $P_1 4$-框架,也即是要证明 $\dot{F}$ 是一个传递框架,

只需证 $\dot{F}$ 满足:$\forall X_1\ \forall X_2\ \forall X_3\in\dot{W}(X_1\ \dot{R}\,X_2\wedge X_2\ \dot{R}\,X_3\Rightarrow X_1\ \dot{R}\,X_3)$。

这等价于需证:对于$\forall X_1\ \forall X_2\ \forall X_3\in\dot{W}$,有:

$(\{\alpha:\Box\alpha\in X_1\}\subseteq X_2)$且$(\{\alpha:\Box\alpha\in X_2\}\subseteq X_3)\Rightarrow(\{\alpha:\Box\alpha\in X_1\}\subseteq X_3)$。

给定前提$\forall X_1\ \forall X_2\ \forall X_3\in\dot{W}$及$(\{\alpha:\Box\alpha\in X_1\}\subseteq X_2)$且$(\{\alpha:\Box\alpha\in X_2\}\subseteq X_3)$,设任意公式$\Box\alpha\in X_1$,

根据公理 A(20),可得$\vdash\Box\alpha\to\Box\Box\alpha$;

那么根据引理 2(6),可得$\Box\Box\alpha\in X_1$;由 $X_1\ \dot{R}\,X_2$,可得$\Box\alpha\in X_2$;

再由 $X_2\ \dot{R}\,X_3$,可得 $\alpha\in X_3$;

因此,$\forall X_1\ \forall X_2\ \forall X_3\in\dot{W}(X_1\ \dot{R}\,X_2\wedge X_2\ \dot{R}\,X_3\Rightarrow X_1\ \dot{R}\,X_3)$。

所以,$\dot{F}$ 是一个传递框架,也即,$\dot{F}$ 是一个 $P_1 4$-框架。

引理 13 $\dot{M}=(\dot{W},\ \dot{R},\ \dot{V})$是一个 $P_1 4$-模型。

证明:由引理 12 可知,$\dot{F}=(\dot{W},\ \dot{R})$是一个 $P_1 4$-框架;又由引理 7 可知 $\dot{V}$ 满足赋值定义的(1)—(9)。所以,$\dot{M}$是一个 $P_1 4$-模型。

定理 15 $P_1 4$ 是完全的,即:若$\models_{P_1 4}\alpha$,则$\vdash_{P_1 4}\alpha$。

证明:类似于定理 9 的证明,略。

(四)弗完全模态逻辑系统 $P_1 G$

$P_1 G$ 是在 $P_1 4$ 的基础上,通过增加模态公理(A6)$\Diamond\Box\alpha\to\Box\Diamond\alpha$ 得到的。

$P_1 G$ 的公理模式如下:

(1)$P_1 4$ 的全部公理(模式);

(2)A(21) $\Diamond\Box\alpha\to\Box\Diamond\alpha$。

定理 16 $P_1 G$ 是可靠的,即:如果$\vdash_{P_1 G}\alpha$,那么$\models_{P_1 G}\alpha$。

证明:由于 $P_1 G$ 的全部公理(模式)包括其特征公理 A(21)在 $P_1 G$-框架上有效,且其推理规则在任一框架类上有效,易得系统 $P_1 G$ 是可靠的。

引理 14 $\dot{F}=(\dot{W},\ \dot{R})$是一个 $P_1 G$-框架。

证明:证 $\dot{F}$ 是一个 $P_1 G$-框架,也即是要证 $\dot{F}$ 是一个弱有向框架;

只需证 $\dot{F}$ 满足:$\forall X_1\ \forall X_2\ \forall X_3\in\dot{W}((X_1\ \dot{R}\,X_2\wedge X_1\ \dot{R}\,X_3)\Rightarrow\exists X'\in\dot{W}(X_2\ \dot{R}\,X'\wedge X'\,\dot{R}\,X_3))$

这等价于需证,对于$\forall X_1\ \forall X_2\ \forall X_3\in\dot{W}$有:

$X_1\ \dot{R}\,X_2\wedge X_1\ \dot{R}\,X_3\Rightarrow\exists X'\in\dot{W}(X_2\ \dot{R}\,X'\wedge X'\,\dot{R}\,X_3)$

$\Leftrightarrow(\{\alpha:\Box\alpha\in X_1\}\subseteq X_2)\wedge(\{\alpha:\Box\alpha\in X_1\}\subseteq X_3)\Rightarrow$

$\exists X'\in\dot{W}((\{\alpha:\Box\alpha\in X_2\}\subseteq X')\wedge(\{\alpha:\Box\alpha\in X'\}\subseteq X_3))$

$\Leftrightarrow(\{\Diamond\alpha:\alpha\in X_2\}\subseteq X_1)\wedge(\{\alpha:\Box\alpha\in X_1\}\subseteq X_3)\Rightarrow$

$\exists X'\in\dot{W}((\{\alpha:\Box\alpha\in X_2\}\subseteq X')\wedge(\{\Diamond\alpha:\alpha\in X_3\}\subseteq X'))$

$\Leftrightarrow(\{\Diamond\alpha:\alpha\in X_2\}\subseteq X_1)\wedge(\{\alpha:\Box\alpha\in X_1\}\subseteq X_3)\Rightarrow$

$\exists X'\in\dot{W}(\{\alpha:\Box\alpha\in X_2\}\cup\{\Diamond\alpha:\alpha\in X_3\}\subseteq X')$

如果可以证明公式集$\{\alpha:\Box\alpha\in X_2\}\cup\{\Diamond\alpha:\alpha\in X_3\}$是协调的,那么根据极大协调集扩充引理,就总是可以将公式集$\{\alpha:\Box\alpha\in X_2\}\cup\{\Diamond\alpha:\alpha\in X_3\}$扩充成为一个极大协调集 Γ,Γ 属于极大协调集的集合 max(即$\in\dot{W}$),且协调集$\{\alpha:\Box\alpha\in X_2\}\cup\{\Diamond\alpha:\alpha\in X_3\}$又总包含于 Γ 的,所以就可以将 Γ 视为 X',也即这样的 X' 总是存在的。所以,为证 $\dot{F}$ 是一个弱有向框架,只需证公式集$\{\alpha:\Box\alpha\in X_2\}\cup\{\Diamond\alpha:\alpha\in X_3\}$是协调的。

假设 $X_1\ \dot{R}\,X_2\wedge X_1\ \dot{R}\,X_3$,

即假设了$(\{\alpha:\Box\alpha\in X_1\}\subseteq X_2)\wedge(\{\alpha:\Box\alpha\in$

$X_1\} \subseteq X_3)$,

也即假设了$(\{\Diamond\alpha:\alpha\in X_2\}\subseteq X_1)\wedge(\{\alpha:\Box\alpha\in X_1\}\subseteq X_3)$。

使用反证法,假设公式集$\{\alpha:\Box\alpha\in X_2\}\cup\{\Diamond\alpha:\alpha\in X_3\}$是不协调的,

也即假设了:

在公式集$\{\alpha:\Box\alpha\in X_2\}$中,有$\beta_1,\cdots,\beta_j$,

并且在公式集$\{\Diamond\alpha:\alpha\in X_3\}$中有$\gamma_1,\cdots,\gamma_k$使得$\vdash\sim(\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_j\wedge\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_k)$,这等价于$\vdash\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_j\rightarrow\sim(\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_k)$。

因此,根据定理4(1),可得$\vdash\Box\beta_1\wedge\cdots\wedge\Box\beta_j\rightarrow\Box\sim(\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_k)$;

由$\Box\beta_1,\cdots,\Box\beta_j\in X_2$,可得$\Box\beta_1\wedge\cdots\wedge\Box\beta_j\in X_2$;

根据引理2(6),就可得$\Box\sim(\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_k)\in X_2$。

那么由假定$\{\Diamond\alpha:\alpha\in X_2\}\subseteq X_1$,可得$\Diamond\Box\sim(\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_k)\in X_1$;

由公理A(21)$(\Diamond\Box\alpha\rightarrow\Box\Diamond\alpha)$,根据引理2(6),可得$\Box\Diamond\sim(\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_k)\in X_1$;

再由假定$\{\alpha:\Box\alpha\in X_1\}\subseteq X_3$,可得$\Diamond\sim(\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_k)\in X_3$,

即,$\sim\Box(\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_k)\in X_3$;但是有$\Box(\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_k)\in X_3$。

因为假定$\Box(\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_k)\notin X_3$,即$\Box\gamma_1\wedge\cdots\wedge\Box\gamma_k\notin X_3$;

设$\gamma_1=\Diamond\alpha_1,\cdots,\gamma_k=\Diamond\alpha_k$,(其中$\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in X_3$);于是就有

存在一个$i\in\{1,\cdots,k\}(\alpha_i\in X_3$且$\Box\gamma_i\in X_3)$,即$\Box\Diamond\alpha_i\notin X_3$;

根据引理2(3),则有$\sim\Box\Diamond\alpha_i\in X_3$,即$\Diamond\sim\Diamond\alpha_i\in X_3$;

由公理A(20)$(\Box\alpha\rightarrow\Box\Box\alpha)$,可得$(\Diamond\Diamond\alpha\rightarrow\Diamond\alpha)$,则有$\sim\Diamond\alpha_i\in X_3$,即$\Box\sim\alpha_i\in X_3$;再由公理A(19)$(\Box\alpha\rightarrow\alpha)$,则有$\sim\alpha_i\in X_3$。由$\alpha_i\in X_3$且$X_3$是极大协调集可知,这是不可能的,所以,有$\Box(\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_k)\in X_3$。

由$\sim\Box(\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_k)\in X_3$并且$\Box(\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_k)\in X_3$,根据引理2(2),这是不可能的。所以,假设公式集$\{\alpha:\Box\alpha\in X_2\}\cup\{\Diamond\alpha:\alpha\in X_3\}$不协调是不成立的。

因此,$\underset{\cdot}{F}$是一个弱有向性框架。也即,$\underset{\cdot}{F}$是一个P_1G-框架。

引理15　$\underset{\cdot}{M}=(\underset{\cdot}{W},\underset{\cdot}{R},\underset{\cdot}{V})$是一个$P_1G$-模型。

证明:由引理14可知,$\underset{\cdot}{F}=(\underset{\cdot}{W},\underset{\cdot}{R})$是一个$P_1G$-框架;又由引理7可知$\underset{\cdot}{V}$满足赋值定义的(1)—(9)。所以,$\underset{\cdot}{M}$是一个$P_1G$-模型。

定理17　P_1G是完全的,即:如果$\vdash_{P1G}\alpha$,那么$\models_{P1G}\alpha$。

证明:类似于定理9的证明,略。

由于系统P_1D、P_1T、P_14和P_1G都是P_1K的直接扩充,因而,P_1K的定理也将都是这些扩充系统的定理。类似于弗协调逻辑,弗完全模态逻辑也具有可以容纳某些真矛盾的能力①;比如,弗完全模态逻辑可以容纳具有$\alpha\leftrightarrow\neg\alpha$逻辑形式的真矛盾。那么,为什么经典逻辑中不允许真矛盾?因为公式$(\alpha\leftrightarrow\neg\alpha)\rightarrow\beta$在经典逻辑中是定理。该定理的涵义是:如果$\alpha\leftrightarrow\neg\alpha$成立,那么任意的命题$\beta$就成立(这种结果被弗协调逻辑称作"爆炸")。这就意味着,在一个理论中,如果存在形如$\alpha\leftrightarrow\neg\alpha$的陈述,那么以经典逻辑为基础,任意的陈述都将成立。于是,从经典逻辑的角度而言,这样的理论就是全无意义的,或者说是不足道的(trivial)。但是,如果该理论的基础是弗完全逻辑,

①"真矛盾"(dialetheia或true contradiction,前者又译"双面真理")概念最早由普利斯特和卢特雷给出(参见Priest G, Routley R. "Introduction: paraconsistent logics", *Studia Logica*, (1983)44: 4)。普利斯特和卢特雷的"真矛盾"本来是专指形如$\alpha\wedge\neg\alpha$但对包含它们的理论无害的"矛盾",比如,黑格尔的"辩证矛盾"(参见Priest G. *In contradiction: a study of the transconsistent*, 2nd edition, Oxford University Press, 2006, pp. 4-6);可将之称作狭义真矛盾。本文所指的"真矛盾"是一种广义的真矛盾,是对狭义真矛盾概念的扩充;而之所以把真矛盾概念的指称范围扩大,主要有以下三个原因:第一,根据阿鲁黛的研究,形式悖论、形式和非形式的二律背反、辩证矛盾论题都无害于包含它们的理论(参见Arruda A I. "A survey of paraconsistent", in Arruda A I, Chuaqui R, da Costa N C A(eds.), *Mathematical Logic in Latin America*, North-Holland Publishing Company, 1980, pp. 3-6)。第二,尽管普利斯特给出了一些形如$\alpha\wedge\neg\alpha$的悖论,并指出悖论逻辑LP(the Logic of Paradox)可以作为解决它们的逻辑基础(见Priest, G. "The logic of paradox", *Journal of Philosophical Logic*, 1979(8/1): 239),但我们还是认为严格意义的悖论均以能够建构$\alpha\leftrightarrow\neg\alpha$为其形式特征。第三,逻辑系统LP是普利斯特真矛盾理论的基础,根据其联结词的逻辑语义(参见Priest G. "The logic of paradox", *Journal of Philosophical Logic*, 1979(8/1): 226-227),可以验证公式$(\alpha\leftrightarrow\neg\alpha)\rightarrow\beta$在LP中是无效的。这也就是说,将真矛盾概念扩大到形如$\alpha\leftrightarrow\neg\alpha$但对包含它们的理论无害的"矛盾",也不会给真矛盾基础理论带来不一致。因此,概念"真矛盾"在此处扩大为形如$\alpha\wedge\neg\alpha$或$\alpha\leftrightarrow\neg\alpha$,但不会使得理论变为全无意义的"矛盾"。

这样的结果就不会发生;因为,公式($\alpha \leftrightarrow \neg \alpha$)$\rightarrow \beta$ 不是弗完全逻辑系统的定理。由于本文所建立的弗完全模态逻辑诸系统都是弗完全逻辑 P_1 的直接扩充,因而也就继承了系统 P_1 的这种特性。

弗完全模态逻辑继承而来的这种特性主要体现在推论 2:公式(13)到(18)都不是 P_1K-定理;那么根据推论 1,这些公式除了不是 P_1K 的定理,也都不是 P_1K 扩充系统的定理。因此,从($\alpha \leftrightarrow \neg \alpha$)出发,“任何公式(包括模态公式)都成立”的后果就不会在弗完全模态逻辑系统中发生。由于严格意义的逻辑悖论都以能够得到 $\alpha \leftrightarrow \neg \alpha$ 为其形式特征①,因此,弗完全模态逻辑可以作为与模态词相关的逻辑悖论的处理方案。由于必然算子还可以被解读为认知算子、道义算子、时间算子等等,因而弗完全模态逻辑实际上具有更广的应用范围。

例如,如果把必然算子解释为“知道”,那么弗完全模态逻辑就成了弗完全认知逻辑,这种逻辑可以视作知道者悖论的解决方案;因为知道者悖论的结果是产生了形如 $K\alpha \leftrightarrow \neg K\alpha$ 的公式;而该结果之所以有害,就是因为公式($K\alpha \leftrightarrow \neg K\alpha$)$\rightarrow \beta$ 是经典认知逻辑(即,以经典逻辑为基础扩充而得到的认知逻辑)的定理;这就意味着,如果出现了知道者悖论,那么任意的命题都将成立。而在这种情况下,如果我们的逻辑基础是弗完全认知逻辑,由于公式($K\alpha \leftrightarrow \neg K\alpha$)$\rightarrow \beta$ 不再是定理,所以任何命题都成立的爆炸性结果就不会发生。当然,我们应该清楚的是,应对认知悖论的弗完全模态(认知)逻辑方案仅仅是容纳了认知悖论,且不至于导致所有命题都成立的爆炸性后果的出现,但这并不意味着实际上解决了认知悖论。因此,悖论的弗完全模态(认知)逻辑方案实际上是容悖方案,而不是解悖方案。

既然没有解决悖论,为什么仍然需要它?因为当人们发现了悖论,很多时候并不能立即将之解决,而且对于各色悖论,迄今为止人们实际上也没能给出可以让各方面都满意的解决方案。而在完美的解决方案给出之前,如果以经典逻辑为基础,其结果就是任意命题都成立。以知道者悖论为例,就会出现“知道了任意的命题”的后果。那么,在理论上就不需要做认知探索了,因为我们已经知道了一切。但显然,在事实上我们并没有知道一切。因此,在真正解决掉认知悖论之前,我们的逻辑基础不应该是经典认知逻辑。那么应该是什么呢?弗完全模态(认知)逻辑为我们在这种情况下(即,完美的解悖方案给出之前、仍存在该悖论的情况下)提供了一个可靠的逻辑基础,这也许就是弗完全模态逻辑的真正逻辑价值所在。

Paracomplete Modal Logic Systems and Their Logic Characteristics

HAO Xu-dong

(Department of Philosophy, East China Normal University, Shanghai 200241, China)

Abstract: P_1 is a basic paracomplete logic system, in which the law of excluded middle is invalid in the general sense, and some of the logical principles that lead to the explosive result of true contradictions fail in it. This makes paracomplete logic have certain logical characteristics that can tolerate some contradictions and conflicts, but simultaneously will not make the whole system become meaningless. Based on P_1, a series of paracomplete modal logic systems, i. e. P_1K, P_1D, P_1T, P_14, P_1G can be constructed by logically expanding, and their soundness and completeness can also be proved. It can be shown that these modal logic systems with paracomplete property have the ability to tolerate “true contradictions”.

Key words: paracomplete; the law of excluded middle; modal logic; dialetheia; paradox

(责任校对　唐尧)

①张建军:《逻辑悖论研究引论(修订本)》,人民出版社 2014 年版,第 7 页。