doi:10.13582/j.cnki.1672-7835.2022.04.005

知道者悖论的新型解决方案探析

雒自新,贾文辉
(西安交通大学 马克思主义学院,陕西 西安 710049)

摘　要:知道者悖论是关于日常知识概念的严格意义的逻辑悖论。新近出现的两种解悖方案以知道者悖论在可证性逻辑与证明逻辑系统中的重构为基础而得出。这两种新型逻辑系统是独立于解悖而被建构的,因此,从RZH解悖标准来看,对应的两种新方案较好地满足了非特设性要求。艾格基于可证性逻辑提出的解悖方案拒斥知识的真实性原则,这意味着放弃柏拉图经典知识定义。所以,从RZH解悖标准来看,这种方案没有较好地满足充分宽广性要求。迪恩和科克瓦基于证明逻辑提出的解悖方案拒斥统一芭坎公式,而该公式对应的认知规则正是安德森提出的方案所要拒斥的,因此可以构成对后者的一种支持。

关键词:知道者悖论;可证性逻辑;证明逻辑;统一芭坎公式;RZH解悖标准
中图分类号:B812　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-7835(2022)04-0035-08

卡普兰(D. Kaplan)和蒙塔古(R. Montague)于1960年发现的知道者悖论①以最简洁的形式表明,日常知识概念与我们日常使用的最基本的算术是不相容的。这一点与千古疑难说谎者悖论如出一辙。因此,自被发现以来,知道者悖论就广受关注。然而50多年来,一直没有得到大多数人公认的解决方案。近些年来,随着核证逻辑(Provability Logics)作为一种新型逻辑工具的发展日趋完善,研究者们基于此提出了两种新型解悖方案。本文在较为详尽地考察这两种方案的基础上,评析其成就与不足。

一　知道者悖论的严格形式刻画

知道者悖论的建构所依据的是日常进行合理思维的普通理性人对“知识”概念的如下三条共识(即公共信念):

(a)所有知识都是真的;

(b)(a)为人们所知;

(c)如果认知主体知道命题p,并且由p合乎逻辑地推导出命题q,则他也知道q。

其中,认知规则(a)为柏拉图经典知识定义所蕴含。根据该定义,知识是证成了的真信念,所以“为真”是构成知识的必要条件,换言之,就是所有知识都是真的,即(a)。该规则表明,知道者悖论所涉及的是普通理性人所拥有的真正的知识概念,排除了认知主体以为是知识但实际上却并非真正知识的情况。认知规则(b)只是说普通理性人懂得这一点,或者说很容易就此达成共识。认知规则(c)是所谓认知封闭原则,具有多种表现形式。由于怀疑论的论证当中使用了它,所以该规则在认识论当中饱受争议。对认知封闭原则的质疑主要在于它在某种意义上表达了一种“逻辑全能”,是现实世界中的普通理性人无法达到的。比如,虽然由p合乎逻辑地推导出q,但这一推导需要很多步骤,比如一万步。此时,即使是正常的理性人,实际上也可能无法完成这长达一万步的推导,因而最终并不知道q。然而,类似的关于认知封闭规则过强的质疑对此处的(c)并不成立。这是因为,作为知道者悖论推理前提的(c),是一种最弱意义上的认知封闭,即认知主体实际上已经从p合乎逻辑地推导出了q,此时,该认知主体当然应该知道q。也就是说,只要承认这种最弱意义上的认知封闭,对于导出知道者悖论来说就

收稿日期:2022-03-26
基金项目:国家社会科学基金重大项目(18ZDA031);中央高校基本科研业务经费专项资金资助项目(63202306)
作者简介:雒自新(1979—),男,山西朔州人,博士,副教授,博士生导师,主要从事现代逻辑与逻辑哲学研究。
①D. Kaplan & R. Montague. “A Paradox Regained”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1960(1): 271-285.

足够了。

在皮亚诺算术系统(PA)中引入一个新谓词 $K(x)$,表示“x 是知道的”;用 $I(\ulcorner x\urcorner,\ulcorner y\urcorner)$ 表示“从 x 可以合乎逻辑地推导出 y”($\ulcorner x\urcorner$代表 x 的标准名称);则上述三条关于知识的公共信念可以用符号表达如下(其中的“r”与“t”代表任意命题):

$(R_1)K(\ulcorner r\urcorner)\rightarrow r$;

$(R_2)K(\ulcorner K(\ulcorner r\urcorner)\rightarrow r\urcorner)$;

$(R_3)I(\ulcorner r\urcorner,\ulcorner t\urcorner)\wedge K(\ulcorner r\urcorner)\rightarrow K(\ulcorner t\urcorner)$。

由哥德尔自指引理(在 PA 中成立)得:$\neg Z\leftrightarrow\neg K(\ulcorner\neg Z\urcorner)$是 PA 当中的合式公式。该式在逻辑上等值于:

$(G)Z\leftrightarrow K(\ulcorner\neg Z\urcorner)$。

与著名的说谎者语句在形式上类似,G 所表达的直观意思是:(某认知主体)知道自己正在说的这句话是假的。由此,在 PA 的扩充系统当中可作如下演绎推导:

$(1)Z\rightarrow K(\ulcorner\neg Z\urcorner)$	G
$(2)R_1\vdash Z\rightarrow\neg Z$	R_1,(1)三段论
$(3)R_1\vdash\neg Z$	(2),归谬法
$(4)\vdash I(\ulcorner R_1\urcorner,\ulcorner\neg Z\urcorner)$	(3)
$(5)R_3\vdash K(\ulcorner R_1\urcorner)\rightarrow K(\ulcorner\neg Z\urcorner)$	R_3,(4)分离
$(6)\vdash K(\ulcorner\neg Z\urcorner)$	R_2,(5)分离
$(7)R_2\wedge R_3\vdash Z$	G,(6)
$(8)R_1\wedge R_2\wedge R_3\vdash Z\wedge\neg Z$	(3),(7)

上述推导的行(8)表明,在 PA 的扩充系统中,从前提(R_1)、(R_2)与(R_3)出发可以推导出矛盾,并且容易重塑为 Z 与$\neg Z$ 间的矛盾等价式。这就是知道者悖论。

二　基于可证性逻辑的解悖方案

艾格(P. Égré)基于“可证性逻辑”(logic of provability)给出了对知道者悖论的一种解决方案[①],这是近十多年来所提出的一种全新的解悖方案。所谓可证性逻辑,是指模态逻辑系统 GL,该系统由以下公理模式和推理规则构成:

AGL1:经典命题逻辑的所有重言式;

AGL2:$\Box(\varphi\rightarrow\phi)\rightarrow(\Box\varphi\rightarrow\Box\phi)$;

AGL3:$\Box\varphi\rightarrow\Box\Box\varphi$;

AGL4:$\Box(\Box\varphi\rightarrow\varphi)\rightarrow\Box\varphi$;

RGL1(分离规则):$\vdash\varphi\rightarrow\phi,\vdash\varphi\Rightarrow\vdash\phi$;

RGL2(哥德尔规则):$\vdash\varphi\Rightarrow\vdash\Box\varphi$。

一个关于 GL 的重要结论是,它具有“自指”(形式算术中的术语叫做“固定点”或“不动点”)性质。德吉(D. de Jongh)和萨姆斌(G. Sambin)分别独立证明了关于 GL 的自指定理:“对每个模态化到语句字母 p 中的模态公式 $\mu(p)$,存在一个只包含 μ 中的语句字母(p 除外)的模态公式 η,满足 $\eta\leftrightarrow\mu(\eta)$。而且,对该关于 μ 的固定点方程的任意两个解在 GL 中都是可证地等值的”[②]。在这里,如果 $\mu(p)$中的语句字母 p 的每次出现都在□的辖域中,则称一个模态公式 $\mu(p)$被模态化到了 p 中。这样的一个语句 η 称为 μ 的一个自指语句。该固定点定理是哥德尔自指定理在命题语言中的一个复制品。令人感兴趣的是,这里的自指定理与哥德尔编码无关,并且与自指替换也无关。

索洛韦(R. Solovay)通过引入“形式算术解释”概念,证明了 GL 系统的可靠性与完全性[③]。一个形式算术解释$\mathfrak{R}$就是从模态语言的公式集到 PA 的语句集的映射,满足如下条件:

(i)对每个命题变元 p,$\mathfrak{R}(p)$是 PA 的一个语句;

(ii)$\mathfrak{R}(\neg\varphi)$是$\neg\mathfrak{R}(\varphi)$,$\mathfrak{R}(\varphi\rightarrow\phi)$是$\mathfrak{R}(\varphi)\rightarrow\mathfrak{R}(\phi)$,……;

(iii)$\mathfrak{R}(\Box\varphi)$是 *Provable*$(\ulcorner\mathfrak{R}(\varphi)\urcorner)$,$\mathfrak{R}(\Diamond\varphi)$是$\neg$ *Provable*$(\ulcorner\neg\mathfrak{R}(\varphi)\urcorner)$。

形式算术解释$\mathfrak{R}$使每个模态公式对应于一个形式算术语句,按照 PA 的预定解释,后者可以表达某个元数学命题(因为“可证”是一个元数学概念),如表 1 所示。

逻辑学家所关注的并不是个别形式算术解释,而是在所有形式算术解释下保持不变的语形特征和语义特征,也就是所有解释结果的可证性与真实性。

另外,索洛韦还给出了 GL 的一个可判定扩充系统(用 GLS 表示),该系统可以表达“可证的

①P. Égré. “The Knower Paradox in the Light of Provability Interpretations of Modal Logic”, *Journal of Logic, Language and Information*, 2005(14): 13-48.

②转引自:S. Artemov. “Provability Logic”, in P. Blackburn, J. van Benthem, and F. Wolter (eds.), *Handbook of Modal Logic*, Amsterdam: Elsevier Science Publications, 2007, p.935. 详细证明参见:G. Boolos. *The Logic of Provability*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993, pp.104-123.

③R. Solovay. “Provability Interpretations of Modal Logic”, *Israel Journal of Mathematics*, 1976(25): 387-304.

东西普遍为真”这样的思想(即下述公理 $AGLS_2$)。GLS 系统由以下公理和推理规则构成:

$AGLS_1$:GL 的所有定理;

$AGLS_2$:$\Box\varphi\rightarrow\varphi$;

$RGLS_1$(分离规则):$\vdash\varphi\rightarrow\phi$, $\vdash\varphi\Rightarrow\vdash\phi$。

索洛韦的结论可以通过如下两条定理来表达:

索洛韦第一定理:GL $\vdash\varphi\Leftrightarrow$对所有形式算术解释$\Re$,PA $\vdash\Re(\varphi)$。

索洛韦第二定理:GLS $\vdash\varphi\Leftrightarrow$对所有形式算术解释$\Re$,$\Re(\varphi)$为真。

表 1　形式算术解释、模态公式与元数学命题的对应

模态公式	形式算术解释	元数学含义
$\Box\varphi$	$Provable(\ulcorner\Re(\varphi)\urcorner)$	$\Re(\varphi)$可证
$\Box\neg\varphi$	$Provable(\ulcorner\neg\Re(\varphi)\urcorner)$	$\Re(\varphi)$可反驳
$\neg\Box\varphi\wedge\neg\Box\neg\varphi$	$\neg Provable(\ulcorner\Re(\varphi)\urcorner)\wedge\neg Provable(\ulcorner\neg\Re(\varphi)\urcorner)$	$\Re(\varphi)$不可判定

艾格将知道者悖论整合到了前述可证性逻辑当中。其具体做法如下:首先,导出知道者悖论所用的认知规则与经典命题模态逻辑的公理模式相对应。例如,以上规则(R_1)就与 T 公理(即$\Box\phi\rightarrow\phi$)相对应。然后,可以将一个已知的经典命题模态逻辑系统作对角化扩充,即对该系统所对应语言的任意公式 $\phi(p, q_1,\cdots, q_n)$(其中变项 p 的所有出现都在模态算子的辖域内),存在一个 n 元算子 $\delta_\phi(q_1,\cdots, q_n)$满足公理模式:$\delta_\phi(q_1,\cdots, q_n)\leftrightarrow\phi(\delta_\phi(q_1,\cdots, q_n), q_1,\cdots, q_n)$。算子 $\delta_\phi(q_1,\cdots, q_n)$称作对模态公式 $\phi(p, q_1,\cdots, q_n)$的一个固定点算子。这样做的目的是使所得到的语言能够表达自指语句。例如,如果 ϕ 是一个命题模态逻辑中的公式$\Box\neg p$,则在对角化扩充的系统中存在一个算子 δ_ϕ,使得公式 $\delta_\phi\leftrightarrow\phi\Box\neg\delta_\phi$ 成立,此时的 δ_ϕ 就扮演者知道者语句的角色。经过这种对角化扩充就得到了带有固定点算子的模态逻辑,即前述可证性逻辑。最后,在所得逻辑系统中引入一个满足如下规则的二元模态算子$[I]$:如果$\vdash\varphi\rightarrow\phi$,那么$\vdash[I]\varphi\phi$。同时添加相应的公理模式:$\Box\varphi\wedge[I]\varphi\phi\rightarrow\Box\phi$。如此所得到的系统就可以给出知道者悖论及其相关结果的一种统一表达。艾格认为这样做的好处在于,可以抓住问题的本质,使知道者悖论的研究清晰化、条理化,从而为解悖指出明确的方向。具体说来就是,一个带有固定点算子的模态逻辑由三要素组成,即经典命题逻辑、自指以及一定数量的模态装置。因此,解决知道者悖论的可能策略将主要包括以下三个方面:(1)放弃自指;(2)修改模态装置;(3)修改经典逻辑。

在此基础之上,艾格依次考查了这三种解悖策略,即知道者悖论的三种具体解决方案:斯克姆(B. Skyrms)的元语言处理①、安德森的索引性处理②和索洛韦的方案。斯克姆的处理建构了可证性谓词的一种层级,通过这种层级来阻止自指的出现。安德森的“索引性处理”同样定义了知识谓词的一种无限序列,但为自指留下了空间。索洛韦证明了,模态逻辑系统 GL 与 GLS 和在模态公式的标准翻译下分别是“可证的”和“为真的”的算术公式集之间是精确对应的,即证明了对模态的一种元语言处理(即把模态处理为语句谓词,而不是语句形成算子)是相容的。系统 GLS 通过限制自返规则(即前面的规则(R_1)的对应模态形式)被系统地反复使用,从而阻止了矛盾的出现。模态逻辑系统 GL 与 GLS 均可以看作是认知逻辑系统,因而这就隐含地给出了对知道者悖论的一种解决方案。索洛韦的这种方案在保留经典逻辑和自指的基础上通过适当地将包含在知道者悖论中相互冲突的模态相分离,从而达到解悖的目的。艾格把它看作一种最为合理的解悖方案。

三　基于证明逻辑的解悖方案

在艾格之后,迪恩(W. Dean)和科克瓦(H. Kurokawa)基于“证明逻辑”(logic of proofs)给出了对知道者悖论的另外一种新型解决方案。

阿迪莫夫(S. Artemov)通过被称之为“证明多项式”(proof polynomials)的证明项,引入了第一个证明逻辑的系统(简记作 LP)。LP 的显著特

①B. Skyrms. “An Immaculate Conception of Modality, or How to Confuse Use and Mention”, *The Journal of Philosophy*, 1978(75): 368-387.

②C. A. Anderson. “The Paradox of the Knower”, *The Journal of Philosophy*, 1983(80): 338-355.

点在于其中引入了一簇有限多的模态算子,用符号“:”表示,称之为“显在模态”:如果 F 是一个公式而 ρ 是一个证明多项式,则“ρ: F”是一个公式,表示“ρ 是 F 的一个证明”(或者“ρ 证明 F”)。也就是说,在系统 LP 中,“证明”作为一个客体,是研究对象。

证明多项式是由证明变项 x_0, …, x_n,…和证明常项 a_0,…,a_n,…通过如下三种运算而构成的项:应用“·”(二元)、结合“+”(二元)和证明检测者“!”(一元)。也就是说如果 ρ 和 ε 都是证明多项式,那么 ρ·ε、ρ+ε 和! ρ 也都是证明多项式。因此,LP 的语言经由经典命题逻辑的语言扩充而来,还包括证明变项(x_0, …, x_n,…)、证明常项(a_0,…,a_n,…)、函数符号(“!”、“·”和“+”)以及形如“项:公式”的算子符号,其项与合式公式如下:

$\rho ::= x \mid a \mid !\,\rho \mid \rho_1 \cdot \rho_2 \mid \rho_1 + \rho_2$;

$\varphi ::= P_i \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \varphi_1 \vee \varphi_2 \mid \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \mid \neg\, \varphi \mid \rho : \varphi$。

系统 LP 的构成如下[①]:

ALP0:经典命题逻辑的所有重言式;

ALP1:ρ: $(\varphi \rightarrow \phi) \rightarrow (\varepsilon: \varphi \rightarrow (\rho \cdot \varepsilon): \phi)$(应用);

ALP2:ρ: $\varphi \rightarrow \varphi$(自返);

ALP3:ρ: $\varphi \rightarrow !\,\rho: (\rho: \varphi)$(证明检测者);

ALP4:ρ: $\varphi \rightarrow (\rho+\varepsilon): \varphi$, $\varepsilon: \varphi \rightarrow (\rho+\varepsilon): \varphi$(结合);

RLP1(分离规则):$\vdash \varphi \rightarrow \phi$, $\vdash \varphi \Rightarrow \vdash \phi$;

RLP2:如果 A 是公理 ALP0-ALP4 中的一个并且 c 是一个证明常项,那么 $A \vdash c$: A。

由前述 LP 的规则可以看出,证明常项是对显在事实(如逻辑公理)的辩护。证明变项也是变项。“应用”运算对应内在化的分离规则:对每个 ε 和 ρ,一个证明 $\varepsilon \cdot \rho$ 是所有满足如下条件的公式 ϕ——ε 是 $\varphi \rightarrow \phi$ 的一个证明,并且 ρ 是 φ 的一个证明(对某个 φ)。证明 ε 和 ρ 的“加”$\varepsilon+\rho$ 是这样一个证明,它或者证明 ε 所证明的所有东西,或者证明 ρ 所证明的所有东西。“!”是检测证明的正确性的一个一般程序:在已知一个证明 ρ 的前提下,“!”产生 ρ 证明 φ 的一个证明。

阿迪莫夫表明[②],证明多项式表达了对一个命题语言的证明的全部可能运算。任意关于证明的运算,无论是随正规证明系统的选择而不同,还是能被具体化到一个命题语言中,都能够被一个证明多项式实现。系统 LP 是可靠的,并且关于算术是完全的。阿迪莫夫通过所谓“实现化定理”(realization theorem)将 LP 与 S4 自然地联系在了一起。实现化定理的大致意思是,对于任意一条 S4 定理,都存在某种方式,用证明多项式替换其中□的全部出现,就得到 LP 的一条定理。这样,就能够认为 LP 给出了对 S4 有效性的一种精致的分析。

在上述实现化定理中实际上包含一种来自外部的量化,可以认为□算子是一种量词“存在……的一个证明”。一种合理的想法是将这种量化内在化。费汀(M. Fitting)在这种想法的指导下建构了一个逻辑系统 QLP,并给出了一种克里普克语义学,进而证明了其可靠性与完全性[③]。

系统 QLP 是 LP 系统的一个扩充,它允许量词加在证明算子上。QLP 在公式形成规则上对 LP 进行了两点扩充:其一,如果 $\varphi(x)$ 是一个公式,并且 x 是一个证明变项,则$(\forall x)\varphi(x)$也是一个公式;其二,允许证明多项式上的一个附加运算,即如果 ρ 是一个证明多项式,并且 x 是一个证明变项,则$(\rho \forall x)$也是一个证明变项(x 在$(\rho \forall x)$中的出现是约束的)。引入$(\rho \forall x)$的目的在于,如果 ρ 是对 $\varphi(x)$ 的每个特例的一个(统一)证明,那么$(\rho \forall x)$就是对$(\forall x)\varphi(x)$的一个证明。因此,QLP 的公理和推理规则如下:

LP1:经典命题逻辑的所有重言式;

LP2:ρ: $(\varphi \rightarrow \phi) \rightarrow (\varepsilon: \varphi \rightarrow \rho \cdot \varepsilon: \phi)$;

LP3:ρ: $\varphi \rightarrow \varphi$;

LP4:ρ: $\varphi \rightarrow !\,\rho: (\rho: \varphi)$;

LP5:ρ: $\varphi \rightarrow (\rho+\varepsilon): \varphi$, $\varepsilon: \varphi \rightarrow (\rho+\varepsilon): \varphi$;

QLP1:$(\forall x)\varphi(x) \rightarrow \varphi(\rho)$,对任意证明项 ρ,ρ 对 $\varphi(x)$ 中的 x 是自由的;

QLP2:$\varphi(\rho) \rightarrow (\exists x)\varphi(x)$,对任意证明项 ρ,ρ 对 $\varphi(x)$ 中的 x 是自由的;

QLP3:$(\forall x)(\phi \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow (\phi \rightarrow (\forall x)\varphi(x))$;

QLP4:$(\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \phi) \rightarrow ((\exists x)\varphi(x) \rightarrow$

①在“结合力”方面,“ρ:”和“¬”最强,“∧”与“∨”次之,“→”最弱。

②S. Artemov. “Operations on Proofs that can be Specified by Means of Modal Logic”, in M. Zakharyaschev, K. Segerberg, M. de Rijke and H. Wansing (eds), *Advances in Modal Logic*(*Volume* 2). Stanford: CSLI Publications, 2001, pp.59-72.

③M. Fitting. “Quantified LP”, *Technical Report*, CUNY Ph.D. Program in Computer Science Technical ReportTR-2004019, 2004.

ϕ);

UBF:$(\forall x)\rho(x):\varphi(x)\rightarrow(\rho\forall x):(\forall x)\varphi(x)$。

公理 LP2、LP3 和 LP4 将分别被认为是模态逻辑系统 S4 的公理 K、T 和 4 的显式版本,其中的□已经被显式模态所替换。UBF 被称为"统一芭坎公式"。它表达了这样的意思:如果对所有 x,证明项 $\rho(x)$ 用作 $\varphi(x)$ 的一个证明,则统一证明者项 $(\rho\forall x)$ 用作 $(\forall x)\varphi(x)$ 的一个证明。需要指出的是,UBF 的来源到目前为止尚不清楚。另外,如果 Γ 是一个公理的有限集合,则如下规则给出了对 QLP 的可推导性关系 $\Gamma\vdash\varphi$ 的规定:

RQLP1:如果 $\varphi\in\Gamma$,那么 $\Gamma\vdash\varphi$;

RQLP2:如果 $\Gamma\vdash\varphi\rightarrow\phi$ 并且 $\Gamma\vdash\varphi$,那么 $\Gamma\vdash\phi$;

RQLP3:如果 $\vdash\varphi(x)$,那么 $\vdash(\forall x)\varphi(x)$;

RQLP4:如果 φ 是 QLP 公理的一个特例,那么 $\Gamma\vdash\varphi$。

下面是两条关于 QLP 的重要定理(其中,嵌入定理建立起了系统 QLP 与 S4 之间的一种联系):

建构性内在化定理:假设 $x_1:\varphi_1,\cdots,x_n:\varphi_n\vdash\phi$,则存在一个证明项 $\rho(x_1,\cdots,x_n)$ 满足 $x_1:\varphi_1,\cdots,x_n:\varphi_n\vdash\rho(x_1,\cdots,x_n):\phi$。

嵌入定理:定义 S4 的语言与 QLP 的语言之间的映射 $(\cdot)^{\exists}$ 如下:$(P_i)^{\exists}=P_i$,如果 P_i 是一个命题字母;$(\cdot)^{\exists}$ 与命题连接词可以互相交换位置;$(\Box A)^{\exists}=(\exists x)x:A^{\exists}$。则 S4$\vdash A$ 当且仅当 QLP $\vdash A^{\exists}$。

系统 LP 与 QLP 的一个重要的应用领域在于知识表示。这是因为,根据经典定义,知识是证成了的真信念,而这里的显在模态"$\rho:F$"可以较为恰当地表达"证成"(justification)。因此,运用证明逻辑,可以给出对知识概念的更加精确的形式化表达。

迪恩(W. Dean)和科克瓦(H. Kurokawa)认为在知道者悖论中所涉及的"知识"是一种依赖"证明"的知识,这是因为该悖论所涉及的认知主体是一个具有理想化演绎能力的充分理性主体。所以这里的知识应该定义如下:

$K(\ulcorner\varphi\urcorner)=_{df}$(在相关的系统中)存在 φ 的一个证明。

而系统 QLP 恰好可以形式化上述思想,即:$K(\ulcorner\varphi\urcorner)=_{df}(\exists x)x:\varphi$。因此,这样表达的知识概念更加准确。在此基础之上,迪恩和科克瓦提出了一套解决知道者悖论的方案。①

迪恩和科克瓦首先证明了下述结论:在 S4 中,对所有的 φ,$\neg\Box(\varphi\leftrightarrow\neg\Box\varphi)$ 成立。其推导如下(在 S4 中进行推理):

(0) $\Box(\varphi\leftrightarrow\neg\Box\varphi)\vdash\varphi\leftrightarrow\neg\Box\varphi$　　T

(1) $\Box(\varphi\leftrightarrow\neg\Box\varphi)\vdash\neg\Box\varphi\rightarrow\varphi$

(2) $\Box(\varphi\leftrightarrow\neg\Box\varphi)\vdash\Box\varphi\rightarrow\neg\varphi$

(3) $\Box(\varphi\leftrightarrow\neg\Box\varphi)\vdash\Box\varphi\rightarrow\varphi$　　T

(4) $\Box(\varphi\leftrightarrow\neg\Box\varphi)\vdash\neg\Box\varphi$　　(2)、(3)

(5) $\Box(\varphi\leftrightarrow\neg\Box\varphi)\vdash\varphi$　　(1)、(4)

(6) $\Box(\varphi\leftrightarrow\neg\Box\varphi)\vdash\Box\varphi$　　Nec、(5)

(7) $\Box(\varphi\leftrightarrow\neg\Box\varphi)\vdash\bot$　　(4)、(6)

(8) $\vdash\neg\Box(\varphi\leftrightarrow\neg\Box\varphi)$　　(0)-(7)

上述推导的右端与知道者悖论的推导具有完全相同的形式。因此,可以把该推导看作是在一种纯的模态环境中重构了知道者悖论的推理。下面可以根据前述嵌入定理所提出的方式,将这里 S4 中的推导转换为一个 QLP 中的推导:

(0) $y:(\varphi\leftrightarrow\neg(\exists x)x:\varphi)\vdash\varphi\leftrightarrow\neg(\exists x)x:\varphi$　　LP3

(1) $y:(\varphi\leftrightarrow\neg(\exists x)x:\varphi)\vdash\neg(\exists x)x:\varphi\rightarrow\varphi$

(2) $y:(\varphi\leftrightarrow\neg(\exists x)x:\varphi)\vdash(\exists x)x:\varphi\rightarrow\neg\varphi$

(3) $y:(\varphi\leftrightarrow\neg(\exists x)x:\varphi)\vdash(\exists x)x:\varphi\rightarrow\varphi$　　QLP 中的推导

(4) $y:(\varphi\leftrightarrow\neg(\exists x)x:\varphi)\vdash\neg(\exists x)x:\varphi$　　(2)、(3)

(5) $y:(\varphi\leftrightarrow\neg(\exists x)x:\varphi)\vdash\varphi$　　(1)、(4)

(6) $y:(\varphi\leftrightarrow\neg(\exists x)x:\varphi)\vdash t(y):\varphi$　　建构性内在化定理

(6′) $y:(\varphi\leftrightarrow\neg(\exists x)x:\varphi)\vdash(\exists x)x:\varphi$　　QLP3

(7) $y:(\varphi\leftrightarrow\neg(\exists x)x:\varphi)\vdash\bot$　　(4)、(6′)

(8) $\vdash\neg y:(\varphi\leftrightarrow\neg(\exists x)x:\varphi)$　　(0)-(7)

(9) $\vdash(\forall y)\neg y:(\varphi\leftrightarrow\neg(\exists x)x:\varphi)$　　RQLP4

(10) $\vdash\neg(\exists y)\neg y:(\varphi\leftrightarrow\neg(\exists x)x:\varphi)$

上述步骤(3)的得出如下:

(a) $\vdash x:\varphi\rightarrow\varphi$　　LP3

(b) $\vdash(\forall x)(x:\varphi\rightarrow\varphi)$　　RQLP4

(c) $\vdash(\forall x)(x:\varphi\rightarrow\varphi)\rightarrow((\exists x)x:\varphi\rightarrow\varphi)$　　QLP4

①W. Dean and H. Kurokawa. "Knowledge, Proof and the Knower", *Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge, Proceedings of the Twelfth Conference* (TARK), 2009, pp.81-90.

(d)$\vdash(\exists x)x: \varphi\rightarrow\varphi$ (b)、(c)

为了建构上述步骤(6)所使用的项 $t(y)$,必须被以建构性内在化定理所给出的方式而将(a)-(d)内在化。这一点可以通过如下步骤而实现:

(e)$\vdash x: \varphi\rightarrow\varphi$ LP3

(f)$\vdash r(x):(x: \varphi\rightarrow\varphi)$ RQLP3

(g)$\vdash(\forall x)r(x):(x: \varphi\rightarrow\varphi)$ RQLP2

(h)$\vdash(\forall x)r(x):(x: \varphi\rightarrow\varphi)\rightarrow(r(x)\forall x):(\forall x)(x: \varphi\rightarrow\varphi)$ UBF

(i)$\vdash(r(x)\forall x):(\forall x)(x: \varphi\rightarrow\varphi)$ (g)、(h)

(j)$\vdash q:(\forall x)(x: \varphi\rightarrow\varphi)\rightarrow((\exists x)x: \varphi\rightarrow\varphi)$ RQLP3

(k)$\vdash q\cdot(r(x)\forall x):((\exists x)x: \varphi\rightarrow\varphi)$ LP2、(i)、(j)

因为$(\exists x)x: \varphi\rightarrow\varphi$(即 $K(\ulcorner\varphi\urcorner)\rightarrow\varphi$)出现在了上面推导的行(10)中,所以它的推导必须被内在化,以便在行(6)去建构项 $t(y)$。这导致行(k),而(k)经由存在概括(即 QLP2)马上蕴含着$(\exists y)y:((\exists x)x: \varphi\rightarrow\varphi)$(即 $K(\ulcorner K(\ulcorner\varphi\urcorner)\rightarrow\varphi\urcorner)$)。另外,在推导(e)-(k)中,尽管$(\exists x)x: \varphi\rightarrow\varphi$ 经由(a)-(d)而被推导出来,但在没有将(h)中的全称量词穿过显式模态互换位置的情况下,似乎没有办法内在化这个证明。所以当在 QLP 系统中重构知道者悖论的时候,必须依赖 UBF。

最后,迪恩和科克瓦给出了 4 方面分别独立的理由(其中即有形式化的,也有非形式化的)去拒斥 UBF,由此去拒斥规则 $K(\ulcorner K(\ulcorner\varphi\urcorner)\rightarrow\varphi\urcorner)$,从而达到解悖的目的。

四 对新方案的审思

解悖标准是衡量与评价各种解悖方案之成就与不足的基本尺度。“RZH 解悖标准”①就是较为恰当而全面的解悖标准。所谓“RZH 解悖标准”包括:足够狭窄性;充分宽广性;非特设性。“足够狭窄”就是消除矛盾,也就是说原有已经发现的悖论被消除,并且没有发现新悖论。“充分宽广”标准是策梅洛(E. Zermelo)首先提出的,他认为一个适当的解悖方案应该尽可能保留原来理论中一切有价值的东西。张建军在此基础之上对这一标准进行了扩充,即能够解决的悖论越多越好。而“非特设性”即“非应急性”,是罗素(B. Russell)首先提出,并为哈克(S. Haack)进一步阐明的。这条标准要求一个解悖方案提供出独立于“去悖论”的充足理由。

根据 RZH 解悖标准,前述两种新型解悖方案的最显著特征在于其非特设性。对此,可以通过追溯这两种方案提出时所使用的逻辑系统的由来加以阐明。可证性逻辑与证明逻辑是当代核证逻辑研究的两个方向。核证逻辑的思想起源于哥德尔(K. Gödel)试图为直觉主义逻辑寻找恰当的语义学而做的工作。直觉主义逻辑的创始人布劳威尔(L. E. J. Brouwer)认为直觉主义的真就意味着可证:“一个陈述为真,如果我们有一个对它的证明;该陈述为假,如果我们能够表明假设存在对该陈述的一个证明会导致矛盾”②。海丁(A. Heyting)于 1930 年建构出了直觉主义逻辑的一个公理系统。在 1931 年到 1934 年间,海丁和科摩格夫(A. N. Kolmogorov)给出了一种语义学,将布劳威尔的直觉主义真理概念明确化。可以称这种语义学为“BHK 语义学”。BHK 语义学认为,一个公式为真,如果存在一个对它的证明。一个复合命题的证明可以表示成它的组成部分的证明的形式。

· $\varphi\wedge\phi$ 的一个证明由 φ 的一个证明和 ϕ 的一个证明给出;

· $\varphi\vee\phi$ 的一个证明由表达或者 φ 的一个证明或者 ϕ 的一个证明给出;

· $\varphi\rightarrow\phi$ 的一个证明是一个由 φ 的证明到 ϕ 的证明的转变的建构;

· $\perp$是一个没有证明的命题,$\neg\varphi$ 是对 $\varphi\rightarrow\perp$ 的简化($\perp$代表矛盾)。

BHK 语义学是人们广泛接受的对直觉主义逻辑的语义学。

哥德尔于 1931 年迈出了为直觉主义发展一种确切的基于经典可证性的语义学的第一步,即形式化上述 BHK 语义学③。他将可证性看作一个逻辑算子,给出了可证性的一种模态演算,这种模态演算类似于经典模态系统 S4,并且将直觉主义命题逻辑(IPC)定义在了这种逻辑中,该演算描述了经典数学中的可证性的性质。哥德尔的可

①张建军:《逻辑悖论研究引论(修订本)》,人民出版社 2014 年版,第 24—32 页。

②A. S. Troelstra and D. van Dalen. *Constructivism in Mathematics: An Introduction (Volume II)*. New York: Elsevier Science Publishers, 1988, p.4.

③K. Gödel. *Kurt Gödel Colledted Works Vol. I*. S. Feferman et al edit. Oxford: Oxford University Press, 1986, pp.301-303.

证性演算基于经典命题逻辑,并且加上如下模态公理和规则(□在这里代表形式算术中的可证性,因而□φ 应该读作“φ 是可证的”):

· $\Box\varphi\to\varphi$,

· $\Box(\varphi\to\phi)\to(\Box\varphi\to\Box\phi)$,

· $\Box\varphi\to\Box\Box\varphi$,

· $\vdash\varphi\Rightarrow\vdash\Box\varphi$。

基于布劳威尔将真理解释为可证性的思想,哥德尔定义了一个从直觉主义公式 φ 到经典模态语言的“翻译”①$\gamma(\varphi)$:$\gamma(\varphi)$=“给公式 φ 的每个子公式加上前缀□”。非形式地讲,当确定一个公式的经典真值的通常程序被应用于 $\gamma(\varphi)$ 的时候,它将检验 φ 的每个子公式是否可证(而非是否为真)。翻译 $\gamma(\varphi)$ 提供了一种从直觉主义逻辑 IPC 到 S4 的恰当嵌入。因而这样一种翻译显然是布劳威尔的理论“直觉主义真理=可证性”的一种适当的公式化。在此基础之上哥德尔还证明了下述定理:IPC $\vdash\varphi\Rightarrow$S4$\vdash\gamma(\varphi)$。该定理给出了 IPC-公式作为关于经典可证性陈述的一种解释。哥德尔还预言以上定理的逆定理也是成立的,并得出结论说:直觉主义可以从这里推导出来。后来,麦金西(J. C. C. Mckinsey)和塔尔斯基(A. Tarski)确实证明了哥德尔的预言②。

然而到此为止,哥德尔试图通过经典可证性去定义 IPC 的最终目标并没有完成,因为 S4 并没有一种对可证性算子“□”的确切解释,也就是说没有建立起 S4 与通常的数学概念中的可证之间的连接。这里的问题如下所示(“$\hookrightarrow$”在这里表示一种恰当的嵌入):

IPC $\hookrightarrow$ S4 $\hookrightarrow$…? …$\hookrightarrow$经典证明。

这里的“经典证明”是指基于对一个包含皮亚诺算术(PA)的经典一阶理论的证明谓词 $Proof(x, y)$ 的系统,该谓词表达了“x 是代码为 y 的公式的一个证明的代码”。哥德尔证明了这里存在的一个问题,并且指出将□φ 解释为形式可证性谓词 $Provable(\varphi)=\exists x Proof(x, \varphi)$ 并不可行,这是因为,设⊥是一个布尔常项“假”,并且□φ 是 $Provable(\varphi)$。则 $\Box\bot\to\bot$ 对应着表达 PA 的相容性的陈述 Con(PA)。并且 S4-定理 $\Box(\Box\bot\to\bot)$ 表达了这样的陈述,即 Con(PA)在 PA 中是可证的,而这并不与哥德尔第二不完全性定理相对应。也就是说哥德尔注意到将模态项“□φ”解释为“φ 是可证的”这种简单的思想与哥德尔第二不完全性定理相矛盾。因此他认为 S4 是一个没有确切可证性语义学的可证性演算,而 $\Box\varphi = Provable(\varphi)$ 的解释是对没有已知公理系统的模态的一种确切的可证性语义学。这样,哥德尔的研究自然就留下了两个有待进一步解决的问题:

问题一:寻找形式可证性谓词 $Provable(\varphi)$ 的模态逻辑;

问题二:寻找 S4 的、并且因而也是 IPC 的一种精确的可证性语义学。

对以上这两个问题的回答就构成了当代“核证逻辑”(provability logics)的两个方向——“可证性逻辑”(又称“模态逻辑的可证性解释”)和“证明逻辑”。

后来,基于哥德尔和勒伯(M. H. Löb)等人所做的工作③,模态逻辑系统 GL 得以建构,从而较为合理地解决了上述问题一。对于上述问题二(即用命题语言公式化 BHK 语义学),哥德尔于 1938 年在维也纳的一次公开演讲中曾提议使用清楚明了的证明“ρ 是 F 的一个证明”的形式去解释他自己的证明演算 S4,然而他并没有给出结果所得到的证明逻辑的一个完全的规则集。遗憾的是,哥德尔的上述演讲稿直到 1995 年才被公开发表④。但在此之前,阿迪莫夫就已经公理化了哥德尔所提议的证明逻辑(即前述证明多项式的引入与 LP 系统的建构),并且证明了其完全性定理⑤。因为证明多项式具有经典证明中的一种自然的语义学,所以这就给出了哥德尔的可证性演算 S4 的一种所渴望得到的可证性语义学。与哥德尔、麦金西和塔尔斯基所得出的结论合在一起,证明逻辑 LP 能够被看作是对直觉主义逻辑 ICP 的 BHK 语义学的一种公式化,这就完成了科摩格夫和哥德尔提出的计划:

①Cf. I. E. Orlov. “The Calculus of Compatibility of Propositions”, *Matematicheskii Sbornik*, 1928(35): 263-286.

②J. C. C. McKinsey and A. Tarski. “Some Theorem about the Sentential Calculi of Lewis and Heyting”, *The Journal of Symbolic Logic*, 1948(13): 1-15.

③需要指出的是,哥德尔和勒伯都没有明确地提出该系统。最早将 GL 当作一个模态逻辑系统考虑的是斯麦莱(T. Smiley),参见 T. Smiley. “The Logic Basis of Ethics”, *Acta Philosophica Fennica*, 1963(16): 237-246.

④K. Gödel. *Kurt Gödel Collected Works Vol. III*. S. Feferman et al edit. Oxford: Oxford University Press, 1995, pp.86-113.

⑤S. Artemov, “Operational Modal Logic”, *Technical Report* MSI95-29, Cornell University, 1995.

IPC $\looparrowright$ S4 $\looparrowright$ LP $\looparrowright$经典证明。

以上对核证逻辑历史的简要梳理,清楚地表明,核证逻辑本身是独立于解悖而产生的。而这两种新型解悖方案最大的特点恰恰在于运用这种新型逻辑系统重构知道者悖论的形式刻画。因此,基于核证逻辑的这两种解悖方案很好地满足了 RZH 标准中的“非特设性”要求,即解悖理由独立于“去悖论”。这是前述两种解悖方案的主要优点。

知道者悖论是关于日常知识概念的一个悖论,因此,按理说对其进行形式刻画应该在认知逻辑系统当中进行。然而,由于仿照模态逻辑建构的当代认知逻辑系统无法表达自指句(即本文第一部分的语句 G),所以,卡普兰和蒙塔古是在形式算术的扩充系统当中刻画知道者悖论的。艾格敏锐地观察到可证性逻辑(即模态逻辑的可证性解释)系统 GL 可以表达自指句,因而,知道者悖论可以在其中得到刻画,这更符合人们对知识概念的直觉理解。相比之下,证明逻辑系统 QLP 不仅可以表达自指句,而且可以将知识概念进一步刻画为:如果存在对某个命题(语句)的一个(非形式)证明,那么它就是知识(即前述 $K(\ulcorner\varphi\urcorner)=_{df}(\exists x)x:\varphi$)。按照柏拉图经典知识定义,知识是证成了的真信念,迪恩和科克瓦认为,这里的“证明”是对“证成了”的恰当表达。因此,在 QLP 当中重构知道者悖论,不仅更符合人们对日常知识概念的直觉理解,而且能够进一步较好地体现柏拉图经典知识定义。

对于知道者悖论,最常见的解决方案是拒斥认知规则(c),即认知封闭原则。而艾格的方案最终的落脚点在于拒斥认知规则(a),即所有知识都是真的。而这一点为柏拉图经典知识定义所蕴含。虽然该定义受到了盖提尔(E. L. Gettier)的有力挑战①,但这种挑战只是对得到证成了的真信念作为知识之充分条件的挑战,而不是对其作为必要条件的挑战,因而也不构成对(a)的挑战。所以,如果接受艾格的解悖方案,就意味着彻底放弃柏拉图经典知识定义。因此,该方案没有较好地满足 RZH 解悖标准所要求的充分宽广性。

抛开复杂而冗长的技术细节,迪恩和科克瓦通过论证知道者悖论在证明逻辑系统 QLP 当中重构时所必须用到的统一芭坎公式(即前述 UBF)不成立,从而达到解悖目的。而该公式对应的是认知规则(b)。由是观之,迪恩和科克瓦的这种解悖方案本质上与安德森的解悖方案类似,或者说构成了对后者的一种支持。

Analysis of New Solutions to the Knower Paradox

LUO Zi-xin & JIA Wen-hui

(School of Marxism, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Knower paradox is a logical paradox in strict sense about the concept of daily knowledge. The two newly emerged solutions are based on the reconstruction of the knower paradox in the system of logic of provability and in the system of logic of proof, respectively. These two new logical systems are constructed independently of solving paradoxes. Therefore, from the perspective of RZH criterion for paradox solution, the corresponding two new solutions better meet the requirement of non-*ad hoc*. P. Égré's solution based on the logic of provability rejects the following principle about knowledge: all knowledge is true. This means that we should give up the classic definition of knowledge made by Plato. Therefore, from the perspective of RZH criterion for paradox solution, this solution is not wide enough. The solution proposed by W. Dean and H. Kurokawa based on the logic of proof rejects the uniform Barcan formula, and the rule of knowledge corresponding to this formula is refused by the solution proposed by C. A. Anderson. Therefore, it can form a support for the latter.

Key words: knower paradox; logic of provability; logic of proof; uniform Barcan formula; RZH criterion for paradox solution

(责任校对　朱春花)

①E. L. Gettier. “Is Justified True Belief Knowledge”, *Analysis*, 1963(23): 121-123.