第 26 卷 第 5 期　　湖南科技大学学报(社会科学版)　　Vol.26 No.5
2023 年 9 月　　Journal of Hunan University of Science and Technology(Social Science Edition)　　Sep. 2023

doi:10.13582/j.cnki.1672-7835.2023.05.006

集合论作为数学基础的不充分性困境及其解决

李娜,叶发扬

(南开大学 哲学院,天津 300350)

摘　要:充分性是衡量一个理论能否作为数学基础的重要标准,其含义是所有数学对象和概念都可以由基础理论得到解释与定义。公理化集合论 ZFC 被广泛接受作为数学的正统基础,但其始终面临着不充分性困境。对于该困境的解决,大致存在修正和更替两条进路。研究发现,修正原有的作为数学基础的集合论并不能真正解决不充分性困境,诸多大范畴仍然得不到构造和解释,而用范畴论替换集合论作为数学的基础才是更好的选择。在更替进路下,范畴论不但实现了对数学实践中几乎所有范畴的构造与解释,还在某种意义上为集合的内在隶属关系提供了成功解释,并且相对于集合论更具有逻辑自主性。

关键词:数学基础;充分性;自主性;集合论;范畴论

中图分类号:B81　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-7835(2023)05-0039-10

数学基础问题是数学哲学中的一个重要议题,尤其是在 19 世纪末 20 世纪初,整个数学哲学基本上都在研究数学基础问题。在数学基础的研究中,哪一种理论理应成为数学的基础理论,这必然存在相应的选择标准。虽然关于数学基础的标准并未真正达成共识,但其中的一致性、完全性以及充分性似乎是所有经典数学基础主义者①都共同接受的。众所周知,由策梅洛(E. Zermelo)、弗兰克尔(A. H. Fraenkel)等人创立的公理化集合论 ZFC 被广泛接受作为数学的基础,但其实质上面临诸多困境。其中大家关注度最高、研究最多的是一致性与独立性问题。具体而言,哥德尔(K. Gödel)的第二不完全性定理表明,ZFC 的一致性无法通过自身得到证明;而且 ZFC 也是不完全的,在其中存在诸如连续统假设 CH 等独立性命题。ZFC 所面临的一致性和独立性困境挑战着集合论的数学基础地位。然而,在 ZFC 中,实际上还存在着另一个更大的挑战,即其作为数学基础的不充分性。所谓的不充分性可以简单地理解为,并非所有的数学对象或概念都能由基础理论解释和定义。在本文中,我们将探究集合论作为数学基础所面临的不充分性困境以及不同进路下的解决方案。

一　集合论作为数学基础的不充分性困境

关于数学基础的充分性问题,学者们进行了不同程度的研究。费弗曼(S.Feferman)明确将充分性作为为范畴论寻找基础的一条标准,他基于当时数学中的范畴实践,列出了一个数学基础所要解释的三类对象:

(R1)允许我们构造给定类型的所有结构的范畴,如所有群的范畴 *Grp*、所有拓扑空间的范畴 *Top* 和所有范畴的范畴 *Cat*。

(R2)允许我们构造从 A 到 B 的所有函子的

收稿日期:2023-05-23

基金项目:国家社会科学基金重点项目(16AZD036);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(ZB21BZ0109)

作者简介:李娜(1958—),女,河南开封人,硕士,教授,主要从事现代逻辑研究。

①所谓的数学基础一般是指为经典数学提供基础,经典数学是基于经典逻辑构造起来的数学理论。相应地,也存在非经典数学以及为非经典数学寻找基础的问题,如模糊集合论可能为模糊数学提供基础。但是,非经典数学及其基础问题并非本文的研究对象。

范畴[A,B][①],其中 A 和 B 是任意范畴。

(R3)允许我们确立通常的基本数学结构的存在,并进行通常的集合论运算[②]。

根据上述标准,如果一个数学基础无法解释这些对象,它就是不充分的。

相较于费弗曼,贝纳布(J. Bénabou)不仅明确将充分性作为数学基础的标准,而且还将其置于一致性之上。事实上,无论是在经验科学抑或非经验科学中,一致性都理应是检验一个经典理论的首要标准。因为根据爆炸原理(其形式为 $\bot \vdash \varphi$,其中 $\bot$ 表示矛盾命题),从矛盾的系统将推导出任意命题,这个系统将是无意义的、平凡的,进而也是不值得研究的。同样,作为数学基础的理论系统也必须满足一致性。19 世纪末 20 世纪初,由集合论悖论引发的数学基础危机,以及由此展开的一系列拯救数学基础的活动,都充分说明了一致性在数学基础中的重要地位。但在贝纳布看来,数学基础的充分性比一致性更重要。他指出:“如果以一种满意的方式实现了充分性,那么一致性应该是一个副产品(by-product)。”[③]当然,他之所以坚持这种观点,也许是因为长期的实践表明,虽然诸如 ZFC 这样的数学基础的一致性证明在数学上难以实现,但我们始终存在化解矛盾的方法,因此,矛盾似乎并不可怕。

除明确将充分性作为数学基础的标准之外,有些学者还用其他概念表达了充分性的内容。例如,麦蒂(P. Maddy)的极大化场域(generous arena)[④],实际上表明所有的数学都可以嵌入基础理论中,所有的数学对象都可以解释为基础理论的对象。再如,斯蒂尔(J. R. Steel)提出的数学基础的最大化解释力(maximize interpretative power)也是充分性的替代阐释。他认为有必要实现数学的统一,而发挥统一作用的基础理论理应具有最大化解释力。他说:“我们的框架理论的目标是最大化解释力,以提供一种语言和理论,使我们今天以及未来的所有数学都可以在其中得到发展。”[⑤]

由上可见,数学基础的充分性标准不仅很重要,而且一定程度上超越了一致性。我们甚至可以说,衡量一个数学基础是否合适的第一标准是充分性。那么在作为数学基础的集合论中,ZFC 的充分性如何体现?其是否满足充分性标准呢?

关于 ZFC 作为数学基础在充分性上的体现,可见于各类集合论著述中。如恩德顿(H. B. Enderton)在《集合论要素》中说:“有时也有人说,‘数学可以嵌入到集合论中’。这意味着数学对象(如数和可微函数)可以被定义为特定的集合。”[⑥]又如莫绍瓦基斯(Y. Moschovakis)在《集合论注释》中陈述集合论的基础作用时说:“同时,公理集合论通常被视为数学的基础:据称所有的数学对象都是集合,并且它们的性质可以从相对较少而优雅的集合公理中推导出来。”[⑦]概而言之,ZFC 的充分性意指所有的数学对象都可以视作某个特定的集合,所有的数学概念都可以由集合概念定义。但是,这种充分性似乎难以达到,面临着不充分性困境。

在充分性问题上,ZFC 首先要面对的是朴素集合论中存在的“大集合”,如序数集、基数集、罗素(B. Russell)集等,这些“大集合”后来被称为“真类”。在不同阶段,朴素集合论与 ZFC 都扮演了数学基础的角色。在朴素集合论作为数学基础时,真类实质上已隐藏其中。在悖论被发现后,ZFC 作为一种修正方案,其对象都是良基集合,否定了真类的存在。抛开一致性问题,我们发现无

①在本文中,我们采用中括号“[ ]”的形式来表示范畴。例如,这里的从范畴 A 到范畴 B 的函子范畴被费弗曼表示为 B^A,为了前后统一,我们将 B^A 改写成[A,B]。

②Feferman S. “Enriched Stratified Systems for the Foundations of Category Theory”, http://math. stanford. edu/~feferman/papers/ess.pdf. 该标准的相关陈述还可见于 Feferman S. “Foundations of Unlimited Category Theory: What Remains to be Done”, *The Review of Symbolic Logic*, 2013, 6(1): 9, 以及 Feferman S. “Categorical Foundations and Foundations of Category Theory”, http://math.stanford.edu/~feferman/papers/Cat_founds.pdf。

③Bénabou J. “Fibered Categories and the Foundations of Naive Category Theory”, *The Journal of Symbolic Logic*, 1985, 50(1): 11.

④关于极大化场域的具体内容与阐释,详见 Maddy P. “What Do We Want a Foundation to Do?”, in Centrone S, Kant D, Sarikaya D(eds.). *Reflections on the Foundations of Mathematics: Univalent Foundations, Set Theory and General Thoughts*. Cham: Springer, 2019, pp. 293-311。

⑤Steel J R. “Gödel's Program”, in Kennedy J(ed.). *Interpreting Gödel: Critical Essays*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014, p. 165.

⑥Enderton H B. *Elements of Set Theory*. New York: Academic Press, 1977, pp. 10-11.

⑦Moschovakis Y. *Notes on Set Theory*(2nd edition). New York: Springer, 2006, p. vii.

论真类存在与否都不影响集合论的基础地位。其中最重要的原因或许是,当时的大部分数学实践似乎并未涉及真类,只需诉诸集合概念就可以构建整个经典数学大厦。虽然基于当时的数学实践ZFC 暂时实现了充分性,但其必须面对真类将来成为合法数学对象的可能性。这种可能性实质上已从两个方面被揭示出来。一方面,根据康托尔(G. Cantor)的造集原则,真类似乎是一个合法的可能的数学对象。另一方面,在不同的解悖方案中,虽然 ZFC 不承认真类的存在,但 NBG(von Neumann-Bernays-Gödel)、MK(Morse-Kelley)等集合论系统却承认了它的合法性。换言之,已有研究者将真类作为一个合法的数学对象看待。但既然真类是一个可能的合法数学对象,而 ZFC 所描述的对象中并不包含真类。因此,ZFC 自创立之初就面临着随时被不充分性问题挑战的可能。

如果说集合论中的真类对象只是使 ZFC 可能遭遇不充分性挑战,那么结构主义的兴起和范畴思想的出现则将这种可能性转化成了必然性。随着数学实践的不断深入,数学哲学家与数学家们发现对象之间的关系或结构才是数学研究的本质,结构主义认为数学就是关于结构的科学。在结构主义视域下,谈论单独的个体是毫无意义的,我们研究的是作为整体的结构。基于此,真类等诸多为 ZFC 所不能刻画的大范畴不断涌现。常见的有:所有集合的范畴 *Set*,所有群的范畴 *Grp*,所有拓扑空间的范畴 *Top*,等等。这些大范畴挑战着集合论的基础性地位,具言之,它们挑战了 ZFC 作为数学基础的充分性。

对于集合论作为数学基础的不充分性困境,大致有两种解决思路:一是不承认新数学对象的合法性,二是修正集合论以使其能够刻画新对象。显然,第一种思路是行不通的,因为真类等大范畴已在数学中广泛存在并被应用。所以,我们只能选择第二种思路,这似乎也是数学基础主义者的共同选择。第二种思路中的“修正”包含三重意义——改正错误、扩张与更替[①],其中更替实际上是一种激烈的修正,不同于一般意义上的修正。因此,我们将改正错误和扩张统归到修正,并把更替从中独立出来。基于此,我们形成了基于修正和更替意义上的两条解决进路的认识。

二　修正意义下的解决进路

在修正进路下解决集合论作为数学基础之不充分性困境的方案,实际上已为学者们所充分研究。费弗曼、舒尔曼(M. A. Shulman)以及巴顿(N. Barton)等都做了不同程度的分析与评介工作,其中舒尔曼的工作尤为详尽全面。在舒尔曼的《范畴论的集合论》一文中,他论及一些并不常见或我们不熟悉的方案,如涉及反射原理和不可达基数的理论 ZFC/S 和 ZMC/S[②]。具体而言,令 S 是一个常元符号,ZFC/S 是在 ZFC 中添加如下两条公理形成的:

(1) S 是传递的,且对子集封闭。

(2) 反射原理:对于任意语句 φ,$\forall x_1 \in S \cdots \forall x_n \in S(\varphi(x_1,\cdots,x_n) \Leftrightarrow \varphi^S(x_1,\cdots,x_n))$。

而 ZMC/S 则是在 ZFC/S 的基础上增加如下公理形成的:

S 是一个格罗滕迪克域(Grothendieck universe)[③]。

当然,由于这些理论在数学基础史上发挥的作用并不大,研究者甚少,因此我们在此不做过多的论述与评价。相较而言,学者们主要聚焦于我们较为熟悉且重要的 NBG、MK 和格罗滕迪克域。因此,我们着重探究这几种方案在充分性问题上的表现。

首先将真类范畴作为数学对象进行看待的理应归功于冯·诺依曼(J. von Neumann),他认为导致集合论悖论的根本原因不在于真类的存在,而是将真类作为其他集合或类的元素。因此,他建立了能够刻画集合和真类的公理集合论系统。后来,贝奈斯(P. Bernays)和哥德尔等人进行了一定的改造,由此形成了我们所熟知的 NBG 系统。从数学基础的充分性来看,NBG 除了可以构造小范畴,还能构造大范畴。舒尔曼指出,NBG 使我们对类的构造更容易。例如,我们可以构造一个大范畴的幂等分裂(idempotent-splitting),令

①这里所述的“修正”概念的基本涵义,参考了任晓明和桂起权关于逻辑可修正性的相关观点与论述。具体详见任晓明,桂起权:《非经典逻辑系统发生学研究:兼论逻辑哲学的中心问题》,南开大学出版社 2011 年版,第 34—37 页。

②Shulman M A.“Set Theory for Category Theory”, https://arxiv.org/pdf/0810.1279.pdf.

③关于格罗滕迪克域的具体内容将在本节的后续部分进行介绍。

A 是一个大幺半范畴(monoidal category),我们可以构造一个严格幺半地等价于 A 的幺半范畴。当然,NBG 也存在缺陷,其中最大的问题在于数学归纳法的失效。舒尔曼继续指出,为了恢复数学归纳法,我们可以选择采用一个 NBG 的变形版本 MK。但 MK 也不能完全满足大范畴的构造。例如,我们只能构造出部分函子范畴,就范畴 A 到范畴 B 的函子范畴 $[A,B]$ 而言,我们可以构造出 A 为小范畴时的函子范畴,但无法构造出 A 为大范畴时的函子范畴①。

解决大范畴问题的另一个重要方法是格罗滕迪克域,"我们可以等价地定义格罗滕迪克域为一个满足传递性($x \in y \in U$ 蕴涵 $x \in U$),并在对集、幂集和索引并下封闭的集合 U"②。相较于 NBG 和 MK,其能够构造出更多的大范畴,就函子范畴而言,对于 U 中的任意两个大范畴 A 和 B,我们可以形成函子范畴 $[A,B]$,而不存在对 A 的限制。另外,假设存在不可达基数 κ,我们可以构造任意的大范畴 A 的预层范畴(presheaf category)$[A^{op},Set]$ 以及内函子范畴(endofunctor category)$[A,A]$ 等等③。但是,我们应该认识到,格罗滕迪克域假设了不可达基数,而不可达基数的存在依赖于包含大基数公理在内的强公理系统,然而对于大基数公理的公理身份及其辩护标准(内在辩护与外在辩护)尚存较大争议④。如果大基数公理不被接受,那么格罗滕迪克域的充分性目标将难以实现。而且即使接受不可达基数的存在,也无法完全实现充分性。麦克莱恩(S. Mac Lane)所述之事实为此提供了佐证:"使用域,所有的函子范畴都存在,但不存在所有群的范畴。"⑤

如前文所述,这三种方案已得到部分学者的充分研究,在此,我们主要对舒尔曼的研究做了一些介绍。值得注意的是,2019 年巴顿和弗里德曼(S. D. Friedman)基于对 NBG、MK 以及格罗滕迪克域的分析,提出了一种新的修正方案,但尚未获得应有的关注,我们在此做一些基本的讨论。

基于当前的结构主义数学实践,巴顿和弗里德曼指出集合论提供了太多的非同构信息。因此,他们试图通过对集合论的修正,使其能够提供相应的结构信息⑥。具体而言,他们基于一个基本的结构概念,将结构中的对象视为无特征的点,称其为本元(urelement),进而建立一个带结构的关于集合和类的公理理论。他们首先建立了一个带结构的集合理论 ZFCS,包括如下公理:

(1)集合论的常见公理:配对公理、并集公理、幂集公理、分离公理、选择公理、外延公理、无穷公理、收集公理。

(2)集合公式—基础公理:如果某个公式对某个集合成立,那么存在一个与所有满足该公式的其他集合不相交的集合,该公式也对该集合成立。

(3)每一个结构的域都是一个集合:$\forall s \exists x \forall a(U(s,a) \leftrightarrow a \in x)$。

(4)反本元集合公理:不存在包含所有本元的集合⑦。

在这些公理中,就结构视角而言,我们需要重点关注的是(3)和(4)。公理(3)将给定结构的域视为集合,从而将结构中的对象视作集合的元素,基于此公理我们就可以利用集合论的原理与方法来分析结构的性质与关系。公理(4)的目的如巴顿和弗里德曼所说,假设反本元集合公理是为了避免限制可用结构的大小,表明集合论也能传达结构信息,使集合论更符合结构主义,同时也

---

①Shulman M A. "Set Theory for Category Theory", https://arxiv.org/pdf/0810.1279. pdf.

②Shulman M A. "Set Theory for Category Theory", https://arxiv.org/pdf/0810.1279. pdf.

③Shulman M A. "Set Theory for Category Theory", https://arxiv.org/pdf/0810.1279. pdf.

④寇亮:《实在论视角下的大基数》,《逻辑学研究》2023 年第 2 期。

⑤Mac Lane S. "Categorical Algebra and Set-Theoretical Foundations", in Scott D S(ed.). *Axiomatic Set Theory*. Providence: American Mathematical Society, 1971, p. 235.

⑥巴顿和弗里德曼所理解的充分性似乎比我们所说的充分性内涵更宽泛,其不仅涉及对象解释的充分性,还包括信息提供的充分性。在信息充分性方面,他们强调集合论作为数学基础应该且能够提供相应的结构信息。

⑦Barton N, Friedman S D. "Set Theory and Structures", in Centrone S, Kant D, Sarikaya D(eds.). *Reflections on the Foundations of Mathematics: Univalent Foundations, Set Theory and General Thoughts*. Cham: Springer, 2019, p. 245.需要说明的是,这里的公理并非照搬原文,而是在内容不变的情况下进行了糅合。

有利于基数的比较以及研究同构不变性①。

显然,ZFCS 不足以处理真类对象,因此他们基于 ZFCS 进一步构建了带结构的类理论 NBGS。具体而言,它是在 ZFCS 的基础上增加两条关于类的公理形成的:

(1)类外延公理:X_n 和 X_m 是相等的,当且仅当它们有相同的成员。

(2)直谓的类概括公理:

$$\exists X\forall u\forall s\forall x((\varphi(u)\leftrightarrow u\in X)\wedge(\psi(s)\leftrightarrow s\in X)\wedge(\chi(x)\leftrightarrow x\in X))$$

其中 u 是本元变元,s 是结构变元,x 是集合变元,在 φ,ψ 和 χ 中没有类量词,并且 φ,ψ 和 χ 分别对于 u、s 和 x 是自由的②。

从数学基础的充分性来看,NBGS 和 NBG 一样能够实现对小范畴和部分大范畴的构造,但大范畴之间的大小都是相同的。然而,在范畴实践中,数学家们进一步区分了大范畴的大小。而且这种区分是非常有必要的,尤其是对于范畴论学者经常提及的最早由弗雷德(P. Freyd)提出并证明的伴随函子定理(adjoint functor theorem),该定理在一定条件下保证了伴随函子的存在。另外,巴顿和弗里德曼还指出该理论所基于的结构概念,同构在其中被理解为一种双射关系。因此,非函数式的范畴和非双射的结构相似性概念在其中得不到刻画③。就非函数式范畴而言,如同伦范畴(homotopy category),其对象是拓扑空间,态射(morphisms)是连续映射;圈范畴(loop category),其对象是拓扑空间中的点,而态射是点之间的连续路径。如此之非函数式范畴还有很多。也就是说,NBGS 实质上也面临不充分性困境。

从结构信息的表达上看,虽然 NBGS 通过添加关于结构的公理,确实能在一定程度上提供结构信息,但在结构表达上仍然存在诸多不足。例如,巴顿和弗里德曼似乎表明基数是否具有结构属性仍然值得商榷,更重要的是,NBGS 似乎不是表达结构的最佳方式。在为作为数学基础的集合论辩护时,巴顿和弗里德曼强调至少可以做两件事情:"1.我们可以说,尽管范畴论学家尽了最大的努力,集合论仍然是讨论数学结构的最佳基础。2.稍微弱一点,我们可以声称,尽管存在很多相反的观点,但集合论仍然是有趣的基础,因为它有很多关于数学结构的信息。"④在强弱两种不同的辩护进路上,他们最终选择基于弱意义进路为集合论进行辩护。之所以做出这样的选择,显然是认识到了集合论虽然可以提供关于数学的结构信息,但其并非是结构数学的最佳基础。同时,他们还隐晦地承认了范畴论在解释数学结构上的适当性。因此,接下来我们重点探究更替意义下的解决进路,即以范畴论作为数学基础的进路。

三　更替意义下的解决进路

由于修正进路无法真正解决集合论作为数学基础的不充分性困境,因此用范畴论替代集合论的更替进路似乎才是更恰当的选择。在更替进路下,我们需要阐明两件事情。一是证明范畴论能够解决集合论作为数学基础的不充分性困境,为所有经典数学的范畴提供解释。但这只能表明范畴论作为数学基础的充分性,并未表达出"更替"的真正内涵。"更替"不同于"修正",修正是基于原有理论的错误改正或扩张,它仍以原来的理论或理论中的概念为基础,而更替则强调用一个全新的理论取代原有理论,不诉诸原有理论及其概念。因此,要表明范畴论对集合论的更替,尚需阐明第二件事情,即范畴论相对于集合论的自主性。换言之,范畴论并未在任何维度上依赖于集合论及其概念,否则范畴论虽然实现了充分性,但其仍然间接建基于集合论之上。在本节中,我们先阐明范畴论作为数学基础的充分性,下一节再论证其自主性。

结构主义认为数学是关于结构的科学,数学家在数学实践中关心的是数学对象之间的结构,

①Barton N, Friedman S D. "Set Theory and Structures", in Centrone S, Kant D, Sarikaya D(eds.). *Reflections on the Foundations of Mathematics: Univalent Foundations, Set Theory and General Thoughts*. Cham: Springer, 2019, p. 246.

②Barton N, Friedman S D. "Set Theory and Structures", in Centrone S, Kant D, Sarikaya D(eds.). *Reflections on the Foundations of Mathematics: Univalent Foundations, Set Theory and General Thoughts*. Cham: Springer, 2019, pp. 246-247.

③Barton N, Friedman S D. "Set Theory and Structures", in Centrone S, Kant D, Sarikaya D(eds.). *Reflections on the Foundations of Mathematics: Univalent Foundations, Set Theory and General Thoughts*. Cham: Springer, 2019, pp. 250-251.

④Barton N, Friedman S D. "Set Theory and Structures", in Centrone S, Kant D, Sarikaya D(eds.). *Reflections on the Foundations of Mathematics: Univalent Foundations, Set Theory and General Thoughts*. Cham: Springer, 2019, p. 234.

研究同构下的结构不变量。结构主义的创立者布尔巴基(N. Bourbaki)学派甚至认为,数学就是一个庞大的结构网络,由代数结构、序结构和拓扑结构三大母结构经过运算与复合而成。然而,范畴论为结构数学的研究提供了统一的语言和框架,所有的结构几乎都可以解释为范畴。具言之,将结构中的对象解释为范畴中的对象,将结构中的关系与性质解释为范畴中的态射。因此,就如同集合论基础主义者认为数学本质上是研究集合一样,范畴论基础主义者完全可以声称数学本质上研究的是范畴。以集合为研究对象发展起来的专门理论是集合论,而以范畴为对象的专门理论则是范畴论。

具体而言,范畴论是一门研究结构的数学理论,由艾伦伯格(S. Eilenberg)和麦克莱恩所创立。一个范畴由对象和态射两个部分组成,态射之间具有复合和恒等关系,同时满足结合律和恒等律。如我们经常提及的范畴,所有集合的范畴 *Set*,其对象是集合,而态射是集合之间的函数关系;所有群的范畴 *Grp*,其对象是群,态射是群同态;所有拓扑空间的范畴 *Top*,其对象是拓扑空间,态射是连续映射;所有环的范畴 *Ring*,其对象是环,态射是环同态。由于范畴论是研究数学结构的理论,因此,虽然关于结构主义存在不同的解释路径,但范畴结构主义认为范畴论才是最适合结构主义的数学框架①。基于此,范畴论被提议作为数学的基础。当然真正被提议作为数学基础的并非是上述抽象的范畴论,而是基于抽象范畴论,通过添加额外的新公理而得到的具体的范畴理论。例如,由范畴论基础主义者劳威尔(F. W. Lawvere)所公理化的两个重要的具体范畴理论:集合范畴的初等理论 ETCS② 和范畴的范畴理论 CCAF③。

在范畴论中,集合被刻画成了小范畴,而真类被刻画成了大范畴,如上所述的 *Set*、*Grp*、*Ring*、*Top* 等都是真正意义上的大范畴,其解决了 ZFC 在充分性上的真类范畴问题。此外,基于已有的范畴我们还可以构造诸多新范畴,如对偶范畴、乘积范畴等。以乘积范畴为例,给定任意两个范畴 A 和 B,我们可以构造乘积范畴 $A \times B$,使其满足 $\mathrm{ob}(A \times B) = \mathrm{ob}(A) \times \mathrm{ob}(B)$,$(A \times B)((a,b),(a',b')) = A(a,a') \times B(b,b')$,其中 a、a' 是 A 中的对象,b、b' 是 B 中的对象。由此可见,乘积范畴 $A \times B$ 的对象是范畴 A 的对象与范畴 B 的对象的乘积,而 $A \times B$ 的态射是范畴 A 的态射与范畴 B 的态射的乘积。更具体地说,范畴 $A \times B$ 中的对象是序对 (a,b),其态射是序对 (f,g),其中 $f: a \to a'$ 是 A 中的态射,而 $g: b \to b'$ 是 B 中的态射④。尤为重要的是,基于基本的范畴我们可以定义和构造函子与自然变换,这也是当初艾伦伯格和麦克莱恩定义范畴概念并发展范畴论的根源。如果以范畴为对象,范畴之间的态射则被称为函子。令 A 和 B 是两个范畴,称 $F: A \to B$ 是从范畴 A 到范畴 B 的函子。就遗忘函子(forgetful functor)的构造而言,例如,"存在一个函子 $Ring \to Set$,其遗忘了环上的环结构,并且(对于任意的域 κ)存在一个函子 $Vect_\kappa \to Set$,其遗忘了向量空间上的向量空间结构。"⑤进一步地,如果以函子为对象,可以继续定义和构造自然变换,我们将函子之间的态射称为自然变换。令 A 和 B 是两个范畴,并且令 $F, G: A \to B$ 是两个函子,称 $\mu: F \to G$ 是从函子 F 到 G 的自然变换。

实际上,基于由 ETCS 构造的集合范畴 *Set* 已经能够发展出几乎所有数学,但是在真实的范畴实践中,范畴论学家还会考虑范畴的范畴,而这些高维范畴的构造与解释则需要以 CCAF 为基础。关于 CCAF 作为数学基础的充分性,劳威尔已做了明确考虑,他旨在为所有范畴的构造与解释提供基础。他说:"事实上,作者认为,获得满足这些要求的基础的最合理的方法是,简单地写下描述直观构思的所有范畴的范畴所具有的性质的公理,直到获得一个直观充分的列表,这就是下述理

①杨睿之:《结构主义是一种有效的数学哲学吗?》,《逻辑学研究》2020 年第 4 期。

②Lawvere F W. "An Elementary Theory of the Category of Sets", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1964, 52(6): 1506-1511.

③Lawvere F W. "The Category of Categories as a Foundation for Mathematics", in Eilenberg S, Harrison D K, Mac Lane S, et al.(eds.). *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra*. Berlin: Springer, 1966, pp. 1-20.

④Leinster T. *Basic Category Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014, p. 16.

⑤Leinster T. *Basic Category Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014, p. 18.

论的基本原理。”①因此，ETCS 和 CCAF 理论上足以实现其基础性目标，也真正解决了集合论作为数学基础的不充分性困境。当然，根据范畴的构造逻辑，以范畴为基点，我们可以继续构造范畴的范畴，范畴的范畴的范畴，以此类推。最后我们会自然地构造出一个收集，即“所有范畴的范畴” *CAT*②，其如同集合论中的全集“所有集合的收集”，即集合论全域 V。根据 ZFC 中的基础公理，所有的集合都是非自属的或良基的，即 V 中的集合都是非自属集。按照罗素集 $R=\{x\mid x\notin x\}$ 的构造形式，我们可以以显示 V 中的对象之性质的形式构造为 $V=\{x\mid x\notin x\}$。由此可见，全集实际上就等同于罗素集。然而，已有的证明已然表明罗素集 R 不是集合，如果 R 是集合，会导致罗素悖论。因此，V 也不是集合。相应地，范畴论中的“所有范畴的范畴” *CAT* 也不应是范畴，如果它是范畴，也将会导致范畴论版本的罗素悖论，进而致使范畴论成为非直谓的理论。所以，在范畴论中 *CAT* 一般不被视作范畴，而仅仅是所有范畴的收集。

上述事实已然证明了范畴论在数学基础上的充分性。但是，我们应该认识到，范畴论基础主义者的论证实质上是基于结构主义立场而进行的，而集合论基础主义者坚持的是对象主义③立场，双方的不同哲学立场导致其在数学基础的选择上各执己见。因此，如果我们能够进一步论证范畴论也能为集合论（主要是集合的隶属关系）提供成功的解释（如此一来，范畴论不仅可以解释数学结构，还能解释数学中的个体对象），那么集合论基础主义者将没有理由不接受范畴论的基础地位。基于此，我们也才真正实现了最全面的充分性论证。

在数学基础上，作为对集合论的替代，范畴论不仅可以刻画结构主义的集合结构，还能刻画对象主义的集合结构。换言之，其不仅可以刻画通常的结构，还能刻画个体对象。从表面上看，这两类结构似乎都是由所有集合收集而成，但它们实质上完全不同。对象主义的集合结构就是全域 V，其揭示的是集合之间的内在隶属关系，该结构可表示为 $(V,\in)$，其中 $\in$ 表示任意两个集合之间的隶属关系，而结构主义的集合结构 V' 侧重的是集合之间的函数关系，该结构可表示为 $(V',\rightarrow)$，其中→表示任意两个集合之间的函数或映射关系。范畴论对这两类结构的解释具体表现如下：对结构主义的集合结构来说，范畴论通过将集合视作范畴中的对象，将集合之间的函数视作态射，进而实现对该结构的解释。就对象主义的集合结构而言，对于任意的集合 A，“a 是 A 中的元素”可以形式化地表示为 $a\in A$。由于在范畴论中存在一个终对象（terminal object）1，而某一范畴的任意一个对象到终对象都存在唯一的态射。因此，在集合论中，我们可以将任一单元素集视作终对象，则 $a\in A$ 可以表示为作为终对象 1 的单元素集到 A 之间的态射关系 $a:1\rightarrow A$。也就是说，在范畴论视域下，集合论中的隶属关系本质上就是一种态射关系。当然，有人反对这种做法，例如，费弗曼认为这只是一种思想上的空壳游戏（ideological shell game）④，换言之，这种解释与翻译方式并无实质意义。

四　范畴论作为数学基础的逻辑自主性

虽然范畴论实现了充分性，但从更替意义上来说其还应满足自主性。需要说明的是，在数学基础的讨论中，自主性仅仅是作为一个数学基础标准被看待，其与充分性处于同一层面。但是，基于解决不充分性困境的更替视角，我们认为其从属于充分性。关于自主性问题，较早由费弗曼提出，但林博（Ø. Linnebo）和佩蒂格鲁（R. Pettigrew）基于费弗曼做了更全面的阐释，他们基

①Lawvere F W. “The Category of Categories as a Foundation for Mathematics”, in Eilenberg S, Harrison D K, Mac Lane S, et al.(eds.). *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra*. Berlin: Springer, 1966, p. 1.

②在范畴论中，“所有范畴的范畴”一般指的是所有小范畴的范畴，其本身是一个更高维的范畴，被表示为 *Cat*。而我们这里指的是包含一切范畴（不论大小）的一个总体或收集，为了和 *Cat* 进行区别，我们用 *CAT* 来表示。

③结构主义一般认为数学对象及其内在性质不是数学研究的重点，数学的本质在于对象之间的关系或结构。在这里为了与结构主义形成对应，同时也突显出数学中“个体对象”的重要性，我们将传统数学实在论中关于个体对象及其内在性质作为研究对象的思想立场称为对象主义。该称谓借鉴了巴拉格尔（M. Balaguer）关于结构主义和对象柏拉图主义的称谓方法。详见 Balaguer M. *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 1998。

④Feferman S. “Foundations of Unlimited Category Theory: What Remains to be Done”, *The Review of Symbolic Logic*, 2013, 6(1): 8.

于不同维度提出了三大自主性要求:逻辑自主、概念自主和辩护自主①。具体而言,逻辑自主强调基础理论在理论构建和概念定义中不依赖于其他理论,概念自主强调对基础理论的理解不诉诸其他理论,而辩护自主旨在表明对基础理论的辩护不诉诸其他理论及其相应的辩护理由。

这三大自主是否都是合理的数学基础标准,可能见仁见智,尤其是其中的概念自主和辩护自主更是值得商榷。林博和佩蒂格鲁曾指出其中一种对概念自主的反对意见,由于不同教育背景的人在理解时对于概念的依赖顺序与程度不同,因此概念自主标准过于主观,不应成为一条合理的标准②。关于辩护自主,林博和佩蒂格鲁指出其需要如同为 ZFC 辩护一样的迭代概念或累积层次结构,然而范畴论似乎并不具有类似的哲学基础。对此,我们有两点反驳意见。第一,不同的理论可以诉诸相同的哲学基础进行辩护。例如,类型论与 ZFC 实际上都包含了累积层次结构的思想,而且它们都被提议作为数学的基础。显然,我们不能说它们的辩护理由是完全不同的。第二,范畴论也并非不存在迭代概念与累积层次结构。麦凯(M. Makkai)曾指出:“……对于 $n=0,1,2,\cdots\cdots$,应该存在一个‘ n 维范畴’的无限层次结构,使得 n 维范畴‘形成’(是对象) $n+1$ 维范畴。”③这已然清楚地表明,范畴论也存在范畴构造的累积层次结构。虽然这为范畴论作为数学基础的自主性提供了一定的辩护,但我们仍然无法确定其是否应该成为一条合理的标准。基于此,我们将坚持最小化原则,只探讨逻辑自主性标准。逻辑自主作为一条合理的标准应该是毫无争议的,因为基础理论作为其他非基础理论的基础,基础理论中的对象与概念是初始性的,其构建与定义必然不依赖于任何其他理论。更进一步看,逻辑自主实质上是概念自主和辩护自主的基础与前提。

就逻辑自主性而言,费弗曼提出范畴论预设了收集④与运算概念⑤,在此基础上,赫尔曼(G. Hellman)又指出其预设了函数概念⑥。当然,真正与集合论中的概念直接相关的是收集与函数概念。因此,我们可以将目前的观点不完全地简要总结为:范畴论预设了收集与函数概念,因此范畴论相对于集合论不具有逻辑自主性。为了科学考量范畴论的逻辑自主性,我们首先要厘清该观点中的逻辑关系。在该结论中,除了一个显性前提“范畴论预设了收集与函数概念”,实际上还隐含另一个前提“集合论是关于收集与函数的唯一理论”。因此,要为范畴论的逻辑自主性辩护,我们有两条辩护路径。一是否定范畴论对收集与函数概念的预设,二是表明集合论并非是关于收集与函数的唯一理论。

在第一条路径下,关于范畴论对于收集概念的预设大家似乎并无太多反对意见,但对函数概念的预设遭到了批驳。麦克拉蒂(C. Mclarty)、孔祥雯等学者认为,范畴论并未预设函数概念,函数概念的作用在于启发。麦克拉蒂说道:“一个比集合论更古老的非常一般的函数概念的确激发了范畴论。但是激发并不是预设。”⑦孔祥雯也指出:“将赫尔曼的质疑进行弱化,可以理解为公理化的范畴论只是受到了某个非正式的函数思想的启发,也可以理解为函数的概念激发了范畴论中的箭头概念。”⑧他们的辩护实际上是基于对“启发”和“预设”这两个概念的区别,并将函数概念

①Linnebo Ø, Pettigrew R.“Category Theory as an Autonomous Foundation”, *Philosophia Mathematica*, 2011, https://sci-hub.se/10.1093/philmat/nkr024.

②Linnebo Ø, Pettigrew R.“Category Theory as an Autonomous Foundation”, *Philosophia Mathematica*, 2011, https://sci-hub.se/10.1093/philmat/nkr024.

③Makkai M.“Towards a Categorical Foundation of Mathematics”, in Makowsky J A, Ravve E V(eds.). *Logic Colloquium'95: Proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association of Symbolic Logic, held in Haifa, Israel, August* 9-18,1995. Berlin: Springer, 1998, p. 169.

④有些学者将收集与集合不加区别地使用和研究,但是我们认为收集和集合是不同的。收集的英文单词是 collection,而集合的英文单词是 set;集合属于收集,但收集不一定是集合。费弗曼使用的是 collection,所以我们认为费弗曼指出的是范畴论对收集概念的预设。

⑤Feferman S.“Categorical Foundations and Foundations of Category Theory”, http://math.stanford. edu/~feferman/papers/Cat_founds.pdf.

⑥Hellman G.“Does Category Theory Provide a Framework for Mathematical Structuralism”, *Philosophia Mathematica*, 2003, 11(2): 129-157.

⑦McLarty C.“Learning from Questions on Categorical Foundations”, *Philosophia Mathematica*, 2005, 13(1): 50.

⑧孔祥雯:《基于范畴论的数学基础研究进路》,山西大学博士学位论文,2019 年。

对范畴论的作用化归于“启发”。然而,由于逻辑自主性是相对于理论的构建或概念的定义而言的,因此,要辨析范畴论是否预设了收集和函数概念,唯一的判据是基于范畴的定义。根据范畴的定义,一个范畴是由对象和态射的收集构成的,由此可见其预设了收集和态射概念。但应该看到,收集并不等同于集合,态射并不等同于函数。具体而言,集合是一种特殊类型的收集,函数是一种特殊类型的态射。就收集来说,NBG 等类理论中的类、类型论中的类型都是一种收集;就态射来说,范畴之间的函子、函子之间的自然变换,以及空间中的点之间的路径都是一种态射。借用林斯特(T. Leinster)的话来说:“范畴的对象不必像集合。范畴中的映射不必像函数。”①因此,范畴论预设了收集和态射概念,但并未预设集合和函数概念。

大部分研究者主要聚焦于第二条路径,基于该路径,即使承认范畴论预设了收集和函数概念,我们也无法得出范畴论依赖于集合论的结论,因为收集和函数概念并不专属于集合论。林博和佩蒂格鲁以 ETCS 为例为范畴论的逻辑自主性进行了辩护,他们指出:“当然,如果不诉诸集合和映射概念,就不可能陈述 ETCS。但是,虽然这些概念可以由正统的集合论引入,但它们并不专属于该理论。相反,ETCS 对它们拥有平等的权利。”②换言之,集合论和范畴论实际上都是收集和函数思想的具体化理论。因此,ZFC 和 ETCS 在本体论上是平等的。当然,它们在认识论上的地位可能有所不同,集合论基础主义者偏向于 ZFC,而范畴论基础主义者则偏向于 ETCS。洛根(S. Logan)也表达了类似的观点:“……我同意‘运算和收集的一般概念’具有逻辑优先性,同时仍然认为这使得集合论和范畴论处于平等的地位;……因此,如果集合论基础被视作是自主的,那么范畴论基础也应该被视为自主的。”③

另外,从发展的时间顺序来看,收集和函数概念的出现都早于集合论。就收集概念而言,虽然不明确其具体出现的时间,但既然集合是基于收集思想发起来的,这足以说明收集概念早于集合概念。就函数来说,自 17 世纪莱布尼茨(G. W. Leibniz)明确提出“函数”这一概念以来,欧拉(L. Euler)、狄利克雷(P. G. L. Dirichlet)、康托尔等数学家相继为函数提供了不同的定义。尤其是在康托尔创立集合论后,由于数学严格性的需要以及集合论在数学基础中的重要地位,数学家们相对普遍地接受了函数的集合论定义。当然,虽然通过集合定义函数的方式较为常见,但在此之前的函数定义与发展史实质上表明,函数并不专属于集合论,集合仅是理解与认识函数的一种方式。

在一种较弱的立场上,有学者似乎还试图将概念与理论的“从属关系”置于“解释”意义下进行看待,从而反对范畴论的逻辑自主性。他们声称集合论是对收集和函数概念的最佳解释,因此范畴论依赖于集合论。这种观点存在的问题是显而易见的。首先,最佳解释是一个相对概念,其相对于一定的时间和认知主体。就时间相对性来说,目前最好的理论并非就是最好的理论,未来可能发展出更好的理论。就认知主体而言,集合论与范畴论哪一个才是对收集与函数思想的最佳解释,其关乎于不同的认知主体所坚持的数学立场。如果坚持数学研究的是作为个体实在的对象,则集合论似乎是最佳的解释;如果坚持数学是关于对象之间关系或结构的研究,则范畴论似乎才是最佳的解释。如麦克拉蒂所说:“我显然同意费弗曼的观点,即数学的基础理应存在于运算和收集的一般理论中,只是我说的目前最好的一般理论是,所谓的箭头和对象的范畴论。”④由此可知,麦克拉蒂不仅表明范畴论是一种收集理论,而且还是目前最好的一种收集理论。其次,还应深刻认识到,概念与理论之间的从属关系与解释关系是两种性质完全不同的关系。以函数概念为例,函数不仅可以通过集合论中的集合进行解释,还可以通过范畴论中的箭头或态射进行解释。如果解释关系等同于从属关系,那么函数将同属于集合论和范畴论。这再次表明函数并不专属于集合论。我们充其量只能说,函数在集合论的解释下

①Leinster T. *Basic Category Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014, p. 13.

②Linnebo Ø, Pettigrew R. “Category Theory as an Autonomous Foundation”, *Philosophia Mathematica*, 2011, https://sci-hub.se/10.1093/philmat/nkr024.

③Logan S. “Category Theory is a Contentful Theory”, *Philosophia Mathematica*, 2015, https://philpa-pers.org/archive/LOGCTI.pdf.

④McLarty C. “Learning from Questions on Categorical Foundations”, *Philosophia Mathematica*, 2005, 13(1): 49.

属于集合论,或者函数在范畴论的解释下属于范畴论。也就是说,解释意义下的从属关系具有相对性。因此,我们只能说函数概念专属于函数理论,但不能无条件地声称函数概念专属于任意一个非函数理论。

结语

关于集合论作为数学基础的不充分性困境,学者们基于两条不同的进路提出了相应的解决方案。一是基于集合论修正进路下的 NBG、MK、格罗滕迪克域与 NBGS 等,二是基于更替进路的范畴论。相较于集合论进路上的修正模式,范畴论似乎才是解决不充分性困境的成功方案。无疑,范畴论在解决该问题上的成功,将为范畴论作为数学基础的合理性辩护提供又一理据,范畴论极有可能替代集合论成为数学的正统基础。同时,更应认识到的是,随着数学实践的不断向前发展,可能还会出现新的数学对象或对象类型,这都将继续强化集合论作为数学基础的不充分性。因此,只要集合论继续被视为数学的基础,那么关于它的不充分性问题的研究似乎就不会停止。但是,问题是理论发展的催化剂,我们相信一定会适时产生解决问题的恰当理论。

The Inadequacy Dilemma of Set Theory as the Foundation of Mathematics and Its Solution

LI Na & YE Fayang

(School of Philosophy, Nankai University, Tianjin 300350, China)

Abstract: Adequacy is an important criterion for determining whether a theory can serve as a foundation for mathematics, which means that all mathematical objects and concepts can be explained and defined by the foundational theory. Axiomatic set theory ZFC is widely accepted as the orthodox foundation of mathematics, but it has always faced the dilemma of inadequacy. There are generally two approaches to solving the dilemma: revision and replacement. Through research, it is found that revising the original set theory as the foundation of mathematics cannot really solve the inadequacy dilemma, and numerous large categories still cannot be constructed and explained. It seems that it is a better choice to replace set theory with category theory as the foundation of mathematics. In the replacement approach, category theory not only realizes the construction and explanation of almost all categories in mathematical practice, but also provides a successful explanation for the internal membership relation of sets in a sense, and it is logically autonomous relative to set theory.

Key words: foundation of mathematics; adequacy; autonomy; set theory; category theory

(责任校对　唐尧)