第 17 卷 第 1 期　湖南科技大学学报(社会科学版)　Vol. 17 No. 1
2014 年 1 月　Journal of Hunan University of Science & Technology(Social Science Edition)　Jan. 2014

■ 逻辑今探

非良基公理和非良基集合论的域①

姚从军[1,2]

(1. 湖南科技学院 思政部,湖南 永州 425199;2. 中国社会科学院 哲学所,北京 100732)

摘　要:正则互模拟是非良基公理和非良基集合论形成的基础,基于正则互模拟形成了一簇非良基公理。定义了三种正则互模拟$\unlhd *$、$\unlhd^{t}$和$\equiv_{V0}$,由它们生成的非良基公理 $AFA^{\unlhd *}$、$AFA^{\unlhd t}$和 $AFA^{\equiv V0}$与经典的非良基公理 FAFA、SAFA 和 AFA 分别等价;非良基公理 FAFA 和 AFA 位于非良基公理簇的两端,SAFA 处于 FAFA 和 AFA 之间;非良基公理 FAFA、SAFA 和 AFA 两两不相容;与非良基公理 FAFA、SAFA、AFA 相对应的外延力依次增强,而相对应的非良基集合论的域依次缩小。

关键词:正则互摸拟;非良基公理;非良基集合

中图分类号:B81　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672 -7835(2014)01 -0033 -08

The Non - Well - Founded Axioms and the Ranges of Non - Well - Founded Sets

YAO Cong-jun[1,2]

(1. Department of politics, Hunan University of Sicence and Engineering, Yongzhou 425199,China;

2. Institute of Philosophy, Chinese Academy of Social Science, Beijing 100732, China)

Abstact: Regular bisimulation is the foundation of the non - well - founded axioms and the non - well - founded set theories, and a family of non - well - founded axioms are based on it. This paper defines the regular bisimulations$\unlhd *$, $\unlhd$t and $\equiv_{V0}$, shows the non - well - founded axioms $AFA^{\unlhd *}$, $AFA^{\unlhd t}$ and $AFA^{\equiv V0}$crrosponding to them are respectively equal to the non - well - founded axioms FAFA, SAFA and AFA; FAFA and AFA are at both ends of the family of non - well - founded , SAFA between them , and FAFA, SAFA and AFA are pairwise incompatible; The extensionalities of FAFA, SAFA and AFA increase incrementally , and their ranges decrease successively.

Key words: regular bisimulation; non - well - founded axioms; non - well - founded sets

一　基础知识

定义 1.1　一个图由一个结点集和一个边集组成,每一条边都是一个由结点组成的序对 $<n,n'>$。如果 $<n,n'>$是一条边,那么我们写成 $n \to n'$并且说 n'是 n 的后继,n 是 n'的前驱。一条路径是一个由边 $<n_0,n_1>$, $<n_1,n_2>$,……连接的、由结点 n_0,n_1,n_2,……组成的有穷或无穷序列 $n_0 \to n_1 \to n_2 \cdots$;一

---

① **收稿日期**:2013 -03 -20
基金项目:国家社科基金项目(12BZX060)
作者简介:姚从军(1971 -),男,湖北随州人,博士,副教授,主要从事数理逻辑研究。

个点图是一个带一可区分结点的图,这一可区分结点称为该图的始点;一个点图是可达的仅当对于每个结点 n 都有一个从该图的始点 n_0 到结点 n 的路径 $n_0 \to n_1 \to \cdots \to n$[1]4。

定义 1.2 一个图 G 的装饰是图 G 的结点集 N_G 到集合全域 V 的一个函数 d,使得对于每个结点 $n \in N_G$(n_G 表示结点 n 的后继集)

$$d(n) = \{d(m)(m \in n_G\}。$$

简言之,一个图的装饰是一个按照如下方式把该图的每一个结点都与一个集合联系起来的指派:指派给一个结点的集合就是指派给该结点的后继的集合的集合。一个集合的图像就是一个带装饰的可达点图,其中该集合被指派给图的始点。

定义 1.3 一个可达点图是精确图仅当它有一个单射的装饰,即不同的结点由装饰指派不同的集合。

定义 1.4 令 M 是一个结点的收集(collection)(可能是一个真类),R 是 M 上的一个二元关系(类关系)。如果对每个结点 $n \in M$,关系 R(被解释为属于关系)使 n 成为一个可达点图 $G \subseteq M$ 的始点,也就是结点集$\{n\} \cup \{m \in M \mid m \in \overline{chn}\}$($\overline{chn}$表示以结点 n 为始点可通达的结点集)加上与 R 对应的边是一个可达点图,那么我们就说 M 是一个系统,用 $<N_M, R>$ 表示。这里 N_M 表示 M 的结点集,常把 N_M 简写为 M,因此 M 既可表示系统 M 又可表示系统 M 的结点集。

每个可达点图就是一个系统,但是反之不然。

定义 1.5 R 是 M 上的一个二元关系,定义 R^+ 如下:对所有的 $n, m \in M$,

nR^+m 当且仅当$(\forall x \in n_M)(\exists y \in m_M)(xRy) \wedge (\forall y \in m_M)(\exists x \in n_M)(xRy)$。

如果 $R \subseteq R^+$,我们称 R 就是 M 上的一个互模拟关系。

注意,对于任意结点 $x \in M$,x_M 表示系统 M 中 x 的子结点(后继)集。

定理 1.1 令$\equiv_M$ 是系统 M 上的一个关系,满足对于任意的 $a, b \in M$, $a \equiv_M b \Leftrightarrow$ 对于 M 上某一小的互模拟 R,aRb。那么每一个系统 M 上都存在惟一的极大互模拟$\equiv_M$,即

(1)$\equiv_M$ 是 M 上的一个互模拟,

(2)如果 R 是 M 上的一个互模拟,那么对于所有 $a, b \in N_M$

$$aRb \Rightarrow a \equiv_M b$$

证明见参考文献[2]。

定义 1.6 一个系统 M 称为外延的,仅当对于所有的 $a, b \in N_M$

$$a_M = b_M \Rightarrow a = b,$$

它是强外延的,仅当对于所有的 $a, b \in N_M$

$$a \equiv_M b \Rightarrow a = b。$$

所有可达点图的收集构成一个系统 V_0,它以可达点图为结点,并且满足对于任意的可达点图 G,如果 $a \to b$ 是 G 的边,那么 $<G_a, G_b>$ 就是 V_0 的边。G_a 和 G_b 是分别以 a 和 b 为始点的可达点图。我们在系统 V_0 上定义一类特殊的互模拟。

定义 1.7 V_0 上的一个互模拟关系 ~ 是一个正则互模拟关系,仅当

(1)~ 是 V_0 上的等价关系。

(2)$G_a \trianglelefteq G'_{a'} \Rightarrow G_a \sim G'_{a'}$。($\trianglelefteq$表示同构)

(3)对于 $a, a' \in N_G$,$a_G = a'_G \Rightarrow G_a \sim G_{a'}$。

这里 N_G 是图 G 的结点集。对于任意结点 $x \in N_G$,x_G 表示图 G 中 x 的子结点集。

定义 1.8 一个系统 M 是一个 ~ -外延系统仅当对所有的 $a, b \in N_M$

$$M_a \sim M_b \Rightarrow a = b$$

有了这些概念,我们可以给出非良基公理簇 AFA ~ 的定义:

定义 1.9　$AFA^{\sim}$ = 一个可达点图是精确图当且仅当它是 ~ - 外延的。

二　三种典型的正则互模拟

(一) 正则互模拟$\trianglelefteq *$

如果 $a\in N_M$,其中 M 是一个系统,令$(M_a)^*$是一个可达点图:由 M_a 中的、位于从 a 的某一个后继出发的路径上的结点和边组成,另外还有一个新的结点 * 以及(对于 a 的每一个后继 x)一条新的边 < *, x >。我们取 * 为$(M_a)^*$的始点。

定义 2.1　对于任意的 $G_a, G'_{a'}\in N_{V0}$,定义 V_0 上的关系$\trianglelefteq^*$为

$$G_a\trianglelefteq^* G'_{a'}\Leftrightarrow(G_a)^*\trianglelefteq(G'_{a'})^*$$

定理 2.1　$\trianglelefteq^*$是 V_0 上的一个正则互模拟。

证明:见杜文静博士论文《反基础公理的模型研究》第 36 页[3]。

定义 2.2　一个系统 M 是$\trianglelefteq^*$ - 外延的仅当对所有的 $a, b\in M$

$$M_a\trianglelefteq^* M_b\Rightarrow a=b$$

有了这些概念,我们就可以生成一个具体的非良基公理:

定义 2.3　$AFA^{\trianglelefteq *}$ = 一个可达点图是精确图当且仅当它是$\trianglelefteq^*$ - 外延的。

如果用 $V^{\trianglelefteq *}$ 表示非良基集合论 ZFC -　+ $AFA^{\trianglelefteq *}$ 的域,那么

$$V^{\trianglelefteq *}=\{G\in N_{V0}\mid G\text{ 是}\trianglelefteq^*\text{ - 外延的}\}。$$

定理 2.2　一个系统 M 是$\trianglelefteq^*$ - 外延的当且仅当它是外延的和同构外延的。

现在介绍什么叫同构外延性。已知一个系统 M 和 M 的一个结点 a,我们可以形成可达点图 M_a 如下:M_a 的结点和边是 M 中从 a 点出发的那些路径上的结点和边,其中 a 是 M_a 的始点。对任意的结点 $a, b\in M$,如果 $M_a\trianglelefteq M_b$,那么 a = b,我们就说 M 是同构外延的。

证明:假设 M 是$\trianglelefteq^*$ - 外延的。对于任意的 $a, b\in M$,我们有 $a_M=b_M\Rightarrow(M_a)^*=(M_b)^*\Rightarrow(M_a)^*=(M_b)^*\Rightarrow(M_a)^*\trianglelefteq(M_b)^*\Rightarrow M_a\trianglelefteq^* M_b\Rightarrow a=b$;并且 $M_a\trianglelefteq M_b\Rightarrow(M_a)^*\trianglelefteq(M_b)^*\Rightarrow M_a\trianglelefteq^* M_b\Rightarrow a=b$。所以 M 是外延的和同构外延的,即 M 是芬斯勒外延的。反之,假设 M 是外延的和同构外延的(芬斯勒 - 外延的),如果 $M_a\trianglelefteq^* M_b$,即$(M_a)^*\trianglelefteq(M_b)^*$,则有三种情况:1)$a_M=b_M\wedge M_a\trianglelefteq M_b$;2)$a_M\neq b_M\wedge M_a\trianglelefteq M_b$;3)$a_M=b_M\wedge M_a\ntrianglelefteq M_b$。由假设可得在这三种情况下都有 a = b,所以 M 是$\trianglelefteq^*$ - 外延的。

由这个定理可以得到 $AFA^{\trianglelefteq *}$ = FAFA(FAFA 是芬斯勒非良基公理)。

(二) 正则互模拟$\trianglelefteq^t$

已知一个可达点图,如果从它的始点到它的所有结点的路径是唯一的,称该可达点图是一棵树。令 G_a 是一个可达点图,它的展开$(G_a)^t$ 以 G_a 的从始点开始的有穷路径作为结点,把形如 $<a=a_0\to\cdots\to a_n, a=a_0\to\cdots\to a_n\to a_{n+1}>$ 的路径有序对作为边,把长度为 1 的路径 a 作为始点。因此,展开总是一棵树。

定义 2.4　对每个可达点图 G_a,令$(G_a)^t$ 表示它的展开。令$\trianglelefteq^t$ 是如下定义的 V_0 上的关系:对所有的 $G_a, G'_{a'}\in N_{V0}$

$$G_a\trianglelefteq^t G'_{a'}\Leftrightarrow(G_a)^t\trianglelefteq(G'_{a'})^t。$$

定理 2.3　$\trianglelefteq^t$ 是 V_0 上的一个正则互模拟。

证明略。

定义 2.5　一个系统 M 是$\trianglelefteq^t$ - 外延的仅当对所有的 $a, b\in N_M$

$$M_a\trianglelefteq^t M_b\Rightarrow a=b。$$

有了这些概念,就可以生成非良基公理 $AFA^{\unlhd^t}$:

定义 2.6　$AFA^{\unlhd^t}$ = 一个可达点图是精确图当且仅当它是 $\unlhd^t$ - 外延的。

如果用 $V^{\unlhd^t}$ 表示非良基集合论 ZFC^- + $AFA^{\unlhd^t}$ 的域 $V^{\unlhd^t}$,那么

$$V^{\unlhd^t} = \{G \in N_{V0} \mid G \text{ 是} \unlhd^t - \text{外延的}\}。$$

易证 $AFA^{\unlhd^t}$ 与斯科特非良基公理等价,常被写作 SAFA。

(三)正则互模拟 $\equiv_{V0}$

我们在系统 V_0 上给出极大互模拟 $\equiv_{V0}$ 的定义。

定义 2.7　对于任意的 $G_a, G'_{a'} \in N_{V0}$,定义 V_0 上的关系 $\equiv_{V0}$ 为

$G_a \equiv_{V0} G'_{a'} \Leftrightarrow$ 对于 V_0 的上某一小的互模拟 R,G_a R $G'_{a'}$。

定理 2.4　$\equiv_{V0}$ 是 V_0 上的一个正则互模拟。

证明很容易,这里省略。

定义 2.8　一个系统 M 是 $\equiv_{V0}$ - 外延的仅当对所有的 $a, b \in N_M$

$$M_a \equiv_{V0} M_b \Rightarrow a = b。$$

很容易证明对任意的系统 M 来说,M 是 $\equiv_{V0}$ - 外延的当且仅当 M 是强外延的。有了这些概念,同样可生成一个反良基公理:

定义 2.9　$AFA^{\equiv V0}$ = 一个可达点图是精确图当且仅当它是强外延的。

如果用 $V^{\equiv V0}$ 表示 ZFC^- + $AFA^{\equiv V0}$ 的域,那么

$$V^{\equiv V0} = \{G \in N_{V0} \mid G \text{ 是} \equiv_{V0}{}^- \text{外延的}\}。$$

我们习惯把 $V^{\equiv V0}$ 简写成 V。

易证 $AFA^{\equiv V0}$ 等价于埃泽尔非良基公理 AFA。

定理 2.5　对任意的系统 M,任意的 $n, m \in M$,

$$M_n \equiv_{V0} M_m \Leftrightarrow n \equiv_M m。$$

证明:假定 $M_n \equiv_{V0} M_m$,在系统 M 上定义一个关系 R,使得对于任意的 $n, m \in M$,$nRm \Leftrightarrow M_n \equiv_{V0} M_m$。下面证 R 是 M 上的一个互模拟关系。由 nRm,则 $M_n \equiv_{V0} M_m$,据 $\equiv_{V0}$ 定义,存在一个小互模拟关系 Z 使得 $M_n Z M_m$。很明显对于所有的 $x \in n_M$,存在 $y \in m_M$,使得 $M_x Z M_y$。因为 $Z \subseteq \equiv_{V0}$,所以 $Mx \equiv_{V0} My$;再根据 R 的定义,xRy。同理对于所有的 $y \in m_M$,存在 $x \in n_M$,xRy。即 nR^+m,$R \subseteq R^+$,故 R 是 M 上的一个互模拟,因此 $n \equiv_M m$。

假定 $n \equiv_M m$,我们定义 V_0 上的二元关系 Z,使得对任意的 $n, m \in M$,$M_n Z M_m \Leftrightarrow n \equiv_M m$,现在我们证 Z 是 V_0 上的一个互模拟关系。由 $M_n Z M_m$,则 $n \equiv_M m$,那么 M 上存在一个小互模拟关系 R 使得 nRm。由互模拟定义,对于任意的 $x \in n_M$(即 $M_x \in (M_n)_{V0}$),存在 $y \in m_M$($M_y \in (M_m)_{V0}$),使得 xRy,因此 $x \equiv_M y$,由 Z 的定义得,$M_x Z M_y$。同理可得,对于任意的 $y \in m_M$($M_y \in (M_m)_{V0}$),存在 $x \in n_M$(即 $M_x \in (M_n)_{V0}$),$M_x Z M_y$。即 $M_n Z^+ M_m$,$Z \subseteq Z^+$,故 Z 是 M 上的一个互模拟,因此 $M_n \equiv_{V0} M_m$。

三　非良基公理之间的关系

正则互模拟确定了非良基公理,不同的正则互模拟决定了不同的非良基公理,我们用 $AFA^{\sim}$ 表示由正则互模拟决定的非良基公理簇。我们定义了三种正则互模拟 $\unlhd^*$、$\unlhd^t$ 和 $\equiv_{V0}$,它们分别决定公理 FAFA、SAFA 和 AFA。这些公理之间有什么关系呢? 公理 AFA 和 FAFA 在公理簇 $AFA^{\sim}$ 中居于两个相反的极端。AFA 表达的是只有强外延的可达点图才是精确图,而 FAFA 表达的是任意芬斯勒 - 外延的可达点图都是一个精确图。我们将证明 SAFA 居于两个极端之间。

定理 3.1　令 ~ 是一个正则互模拟,那么

(1)每一个强外延的系统都是 ~ – 外延的。

(2)每一个 ~ – 外延的系统都是芬斯勒 – 外延的。

(3)$AFA_2 \Rightarrow AFA_2{}^{\sim} \Rightarrow FAFA_2$。

(4)$FAFA_1 \Rightarrow AFA_1{}^{\sim} \Rightarrow AFA_1$。

(5)如果有一个不是强外延的 ~ – 外延的可达点图,那么

$$\neg(AFA_1{}^{\sim} \wedge AFA_2)。$$

(6)如果有一个不是 ~ – 外延的芬斯勒 – 外延的可达点图,那么

$$\neg(FAFA_1 \wedge AFA_2{}^{\sim})。$$

证明:(1)令 M 是任意的强外延系统。对于任意的 $a,b \in M$,如果 $M_a \sim M_b$,由于 $\sim \subseteq \equiv_{V0}$,那么 $M_a \equiv_{V0} M_b$。根据定理 2.5,我们有 $a \equiv_M b$,再由假设 M 是强外延的,所以 $a=b$。故 M 是 ~ – 外延的。

(2)令 M 是 ~ – 外延的。对于任意的 $a,b \in M$,如果 $M_a \trianglelefteq^* M_b$,即 $(M_a)^* \trianglelefteq (M_b)^*$,由定理 2.5 可知有三种情况:1)$a_M = b_M \wedge M_a \trianglelefteq M_b$;2)$a_M \neq b_M \wedge M_a \trianglelefteq M_b$;3)$a_M = b_M \wedge M_a \ntrianglelefteq M_b$。在这三种情况下都有 $M_a \sim M_b$,由假设 M 是 ~ – 外延的可得在这三种情况下都有 $a=b$,所以 M 是芬斯勒外延的。

(3)先证第一个蕴含式。令 G 是一个精确图,假设 AFA_2,因为 $AFA_2 \Leftrightarrow$ 每个精确图都是强外延的,所以 G 是强外延的。对任意 $a,b \in G$,如果 $G_a \sim G_b$,由于 $\sim \subseteq \equiv_{V0}$,那么 $G_a \equiv_{V0} G_b$。根据定理 2.5,我们有 $a \equiv_M b$,再由 G 是强外延的,所以 $a=b$。故 G 是 ~ – 外延的。因此每个精确图都是 ~ – 外延的,由 $AFA_2{}^{\sim} \Leftrightarrow$ 每个精确图都是 ~ 外延的,所以 $AFA_2{}^{\sim}$ 成立。

再证第二个蕴含式。令 G 是一个精确图,假设 $AFA_2{}^{\sim}$,$AFA_2{}^{\sim} \Leftrightarrow$ 每个精确图都是 ~ 外延的,故 G 是 ~ – 外延的。对于任意的 $a,b \in G$,如果 $G_a \trianglelefteq^* G_b$,即 $(G_a)^* \trianglelefteq (G_b)^*$,由定理 2.5 可知有三种情况:1)$a_G = b_G \wedge G_a \trianglelefteq G_b$;2)$a_G \neq b_G \wedge G_a \trianglelefteq G_b$;3)$a_G = b_G \wedge G_a \ntrianglelefteq G_b$。在这三种情况下都有 $G_a \sim G_b$,由假设 G 是 ~ – 外延的可得在这三种情况下都有 $a=b$,所以 G 是芬斯勒外延的。G 是任意的,所以每个精确图都是芬斯勒外延的,由 $FAFA_2 \Leftrightarrow$ 每个精确图都是芬斯勒外延的,所以 $FAFA_2$ 成立。

(4)先证第一个蕴含式。假设 $FAFA_1$。令 G 是 ~ – 外延的可达点图,根据(2):每一个 ~ – 外延的系统都是芬斯勒 – 外延的,那么 G 是芬斯勒外延的。根据假设 $FAFA_1 \Leftrightarrow$ 每个芬斯勒外延的可达点图都是精确图,所以 G 是精确图。因为 G 是任意的,所以每个 ~ – 外延的可达点图都是精确图,由 $AFA_1{}^{\sim} \Leftrightarrow$ 每个 ~ – 外延的可达点图都是精确图,所以 $AFA_1{}^{\sim}$ 成立。

再证第二个蕴涵式。假设 $AFA_1{}^{\sim}$,令 G 是一个强外延的可达点图,根据(1)每一个强外延的系统都是 ~ – 外延的,所以 G 是 ~ – 外延的。根据假设 $AFA_1{}^{\sim} \Leftrightarrow$ 每个 ~ 外延的可达点图都是精确图,所以 G 是精确图。因为 G 是任意的,所以每个强外延的可达点图都是精确图,由 $AFA_1 \Leftrightarrow$ 每个强外延的可达点图都是精确图,所以 AFA_1 成立。

(5)令 G 是 ~ – 外延的,但 G 不是强外延的。我们用反证法。假设 $AFA_1{}^{\sim} \wedge AFA_2$ 成立,则由 $AFA_1{}^{\sim} \Leftrightarrow$ 每个 ~ – 外延的可达点图都是精确图,可得 G 是精确图。又由 $AFA_2 \Leftrightarrow$ 每个精确图都是强外延的,所以 G 又是强外延的。这就与已知 G 不是强外延的矛盾,所以假设不成立,那么其否定 $\neg(AFA_1{}^{\sim} \wedge AFA_2)$ 成立。

(6)令 G 是芬斯勒外延的,但 G 不是 ~ – 外延的。我们用反证法。假设 $FAFA_1 \wedge AFA_2{}^{\sim}$ 成立,那么由 $FAFA_1 \Leftrightarrow$ 每个芬斯勒外延的可达点图都是精确图,所以 G 是精确图。又由 $AFA_2{}^{\sim} \Leftrightarrow$ 每个精确图都是 ~ 外延的,所以 G 又是 ~ 外延的。这就与已知 G 不是 ~ 外延的矛盾,所以假设不成立,那么其否定 $\neg(FAFA_1 \wedge AFA_2{}^{\sim})$ 成立。

定理 3.2 令 ~ 是一个正则互模拟。如果有一个非强外延的而是 ~ – 外延的可达点图,并且有一

个非～－外延的而是芬斯勒－外延的可达点图，那么 AFA、$AFA^{\sim}$ 和 FAFA 是两两不相容的。

证明：先证明 AFA 和 $AFA^{\sim}$ 不相容。因为有一个不是强外延的～－外延的可达点图，根据上面的定理 3.1(6)，可得¬（$AFA_1^{\sim}$（AFA_2），所以¬（$AFA^{\sim} \wedge AFA$），即 AFA 和 $AFA^{\sim}$ 不可同时成立，故它们不相容。

再证 $AFA^{\sim}$ 和 FAFA 是不相容。因为有一个不是～－外延的芬斯勒－外延的可达点图，根据上面的定理 3.1(6)，可得¬（$FAFA_1 \wedge AFA_2^{\sim}$），所以¬（$FAFA \wedge AFA^{\sim}$），即 FAFA 和 $AFA^{\sim}$ 不可同时成立，故它们不相容。

最后证 AFA 和 FAFA 不相容。很明显存在很多不是强外延的芬斯勒外延的图，例如图 1[4]。受定理 3.1(5)的启示，我们可以假设¬（$FAFA_1 \wedge AFA_2$）成立。现在我们来证明此结论。令 G 是芬斯勒外延的，但 G 不是强外延的。我们用反证法。假设 $FAFA_1 \wedge AFA_2$ 成立，则由 $FAFA_1 \Leftrightarrow$ 每个芬斯勒外延的可达点图都是精确图，可得 G 是精确图。又由 $AFA_2 \Leftrightarrow$ 每个精确图都是强外延的，所以 G 又是强外延的。这就与已知 G 不是强外延的矛盾，所以假设不成立，那么其否定¬（$FAFA_1 \wedge AFA_2$）成立，并因此¬（$FAFA \wedge AFA$）成立，即 FAFA 和 AFA 不能同时成立，故它们不相容。

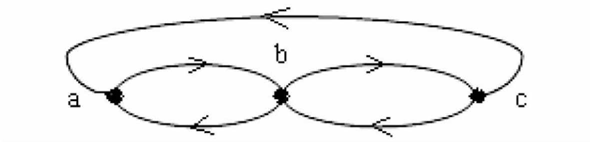

图 1　芬斯勒外延图

定理 3.3　AFA、SAFA 和 FAFA 两两不相容。

证明：把下一小节的事实 4.2 和 4.3 用到上述定理 3.2。

四　非良基集合论的域之比较

外延性问题是集合论问题的核心，因为它确定了集合相等的标准，并因此决定了集合域的大小，或者说某个集合论中集合的基数。图的外延性是系统外延性的特例，不再赘述。

我们来描述图的严格性。如果一个图具有非恒等映射作为自身的同构映射，那么这样的同构也叫真自同构，这样的图被称为非严格的图[3]。图 2 有一个使 b 和 c 互相映射的真自同构，所以是非严格图。如果不存在这样的同构映射则是严格的。但是严格性不蕴含外延性，如图 3[4]。

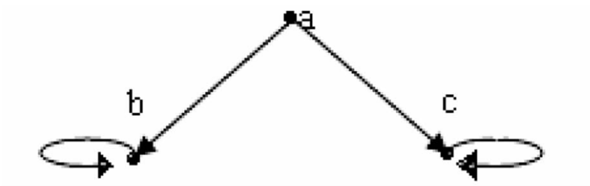

图 2　一个 Boffa 集合的精确图

图 3　一个严格的和同构外延的但非外延的可达点图

图的同构外延性是系统的同构外延性的特例，即对任意的图 G，结点 $a, b \in G$，如果 $G_a \cong G_b$，那么 $a = b$，我们就说 G 是同构外延的。如图 3 就是同构外延的，这说明同构外延性也不蕴含外延性。

我们给出几种具体集合的域，详细论述见参考文献[4]：

$F = V^{\cong *} = \{ G \in V_0 | G$ 是外延且同构外延的（即芬斯勒外延的）$\}$；

$S = V^{\cong t} = \{ G \in V_0 | G$ 是斯科特外延的$\}$；

$A = V^{\cong t} = V = \{ G \in V_0 | G$ 是强外延的$\}$。

据此，我们可以证明下面的命题。

定理 4.1

(1)每一个强外延的系统都是斯科特外延的。

(2)每一个斯科特外延的系统都是芬斯勒外延的。

证明:(1)和(2)分别是定理 3.1(1)和定理 3.1(2)的一个特例,除了斯科特外延的取代(外延的以外,证明完全一样,这里略。

如果用 ext(F)、ext(S)和 ext(A)分别表示非良基公理 FAFA、SAFA 和 AFA 对应的外延性的等价力大小,我们有如下结论。

定理 4.2 $ext(F) \leqslant ext(S) \leqslant ext(A)$。

证明:这是定理 4.1 的一个不足道的后承。

我们还有下面的事实。

事实 4.1 存在一个外延的且非严格的可达点图。

证明:见图 2[4]。

事实 4.2 存在一个外延且严格的非芬斯勒外延的可达点图。

证明:见图 4[4]。

图 4 一个严格的但不是同构外延的可达点图

事实 4.3 存在一个芬斯勒外延的非斯科特外延的可达点图。

证明:图 1 就是一个满足这种条件的图,它是满足方程组 $x=\{y\}$, $y=\{x,z\}$, $z=\{x,y\}$ 的集合 x,y,和 z 的图像[4]。下面再给出一个这样的图(图 5),它是满足方程组 $x=\{x,y\}$, $y=\{z\}$, $z=\{y,z\}$ 的集合 x 的图像。

G_b 是芬斯勒外延的,即 $\trianglelefteq^*$ -外延的,我们可以构造 $(G_a)^*$, $(G_b)^*$ 和 $(G_c)^*$ 如下:

显然 $(G_a)^* \ntrianglelefteq (G_b)^*$, $(G_b)^* \ntrianglelefteq (G_c)^*$ 和 $(G_a)^* \ntrianglelefteq (G_c)^*$,即 $G_a \ntrianglelefteq^* G_b$, $G_c \ntrianglelefteq^* G_b$ 和 $G_a \ntrianglelefteq^* G_c$,因此 G_a 是芬斯勒外延的。

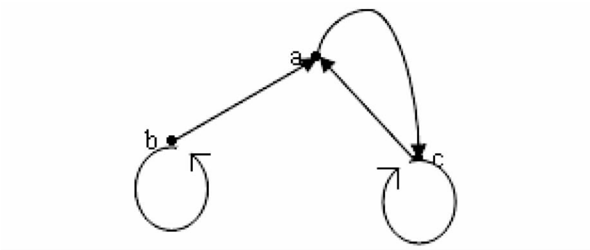

图 5 芬斯勒外延的的非斯科特外延的可达点图 G_b

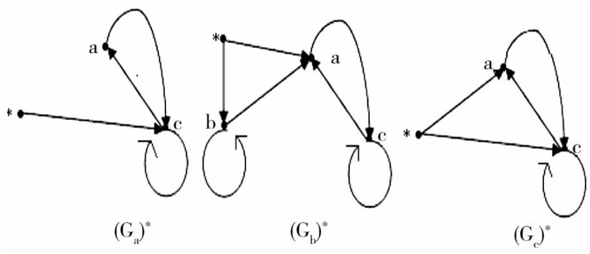

图 6 $(G_a)^*$、$(G_b)^*$ 和 (G_c)

但 G_b 不是斯科特外延的,我们以 b 点为根点展开 G_b,如图 7。

显然,$(G_b)^t \trianglelefteq (G_c)^t$,即 $G_b \trianglelefteq^t G_c$,但是 $b \neq c$,所以 G 不是 $\trianglelefteq^t$ -外延的。

事实 4.4 存在一个斯科特外延的非强外延的可达点图。

证明:见图 8。

G_a 不是强外延的,这一点很容易证明,$a \equiv_C b$,但是 $a \neq b$。但 G_a 是斯科特外延的,我们分别以 a,b 为出发点展开图 8 如图 9。

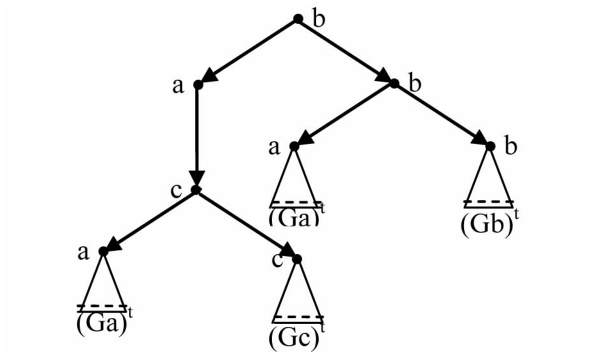

图 7 $(G_b)^t$

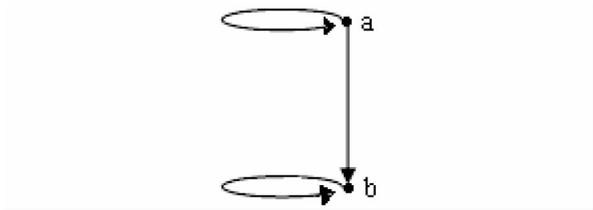

图 8 斯科特外延的非强外延的可达点图 G_a

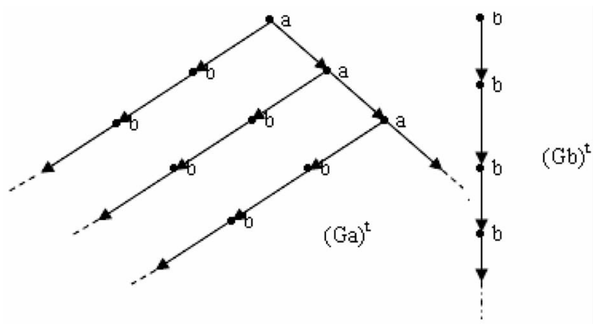

图 9 $(G_a)^t$ 和 $(G_b)^t$

显然 $(G_a)^t$ 与 $(G_b)^t$ 不同构,也就是说 $\neg(G_a \trianglelefteq^t G_b)$,所以 G_a 是斯科特外延的。

有了这些事实,定理 4.2 可改写为

定理 4.3 ext(F) < ext(S) < ext(A)。

相应地,上面各个非良基域之间的关系用下面的命题表示。

定理 4.4 $A \subset S \subset F$。

证明:这是上述定理的一个推论。

由此可知,外延性的等价力与非良基集合域大小类似于反比关系。

参考文献:

[1] Peter Aczel. Non - Well - Founded Sets[M]. Stanford: CSLI Publications,1988.

[2] Sidney Smith B. Hypersets[D]. Ph. D. dissertation, University of Cambridge, 1996.

[3] 杜文静. 反基础公理的模型研究[D]. 天津:南开大学,2011.

[4] 姚从军. 非良基公理的本质及应用[J]. 湖北大学学报,2012(5):17 - 20.

(责任校对 游星雅)