■ 逻辑今探

常逻辑公式与可定义性①

马明辉
(西南大学 逻辑与智能研究中心,重庆 400715)

摘 要:常逻辑公式是不含命题变元的逻辑公式,运用它们可以定义结构类。但反过来某些结构类却不能以常逻辑公式集定义。模态逻辑中一阶可定义的框架类可被常模态公式集定义的充分必要条件,是该框架类对满射互模拟象、不相交并封闭,并且它的补类对超滤扩张封闭。有穷传递框架类相对可由常模态公式集定义的充分必要条件,是它对满射互模拟象和不相交并封闭。这两条定理中后一条可推广至直觉主义逻辑。

关键词:模态逻辑;直觉主义逻辑;框架类;可定义

中图分类号:B81 **文献标识码:**A **文章编号:**1672 - 7835(2013)06 - 0023 - 05

古典模态逻辑理论有 3 个主要分支:可定义性理论、完全性理论和对偶理论[1]167-245。本文研究古典模态逻辑以及相关的直觉主义逻辑的可定义性理论。在国际逻辑学界多年来已产生的研究成果的基础上,本文提出并解决模态框架类可被模态常逻辑公式集定义的刻画问题,以及由此推广至直觉主义逻辑中常公式可定义性定理。

一 何谓可定义性

模型论是数理逻辑的主要组成部分之一。随着古典模态逻辑的发展,模态逻辑的模型论也成为非经典逻辑研究的重要领域,可定义性就是模型论的一个核心概念。从模型论的观点看,对特定的模态语言 L,一个结构类 K 在 L 中可定义,如果存在语言 L 公式集 S 使得 K 等于满足 S 中所有公式的结构所组成的结构类。简单地说,K 在 L 中可运用公式集来反映。有时我们也说某个结构性质 P 可定义,这等价于说所有具有性质 P 的结构类是可定义的。这就是可定义性的基本概念。

从直观上看,一个语言的表达力与可定义性密切联系在一起。可定义或不可定义的结构类或结构性质决定了一个语言表达力的界限。在同一类结构上,也可以比较不同语言在不同语义解释下的表达力的差异。在逻辑理论中,一些逻辑语言的表达力相同,而另一些语言的表达可能会实质性地强于某些语言。这些概念均以可定义性概念来表达:谈论同一结构类的两个语言 L_1 和 L_2,如果任何在 L_1 中可定义的结构类(性质)在 L_2 中也可定义,那么 L_2 的表达力不弱于 L_1;如果反过来也成立,则 L_1 与 L_2 具有相同的表达力。可定义性概念的重要性由此可见,它对于我们研究语言与结构之间的关系至关重要。

模态语言是谈论关系结构的语言[2]2。最简单的关系结构就是框架,即二元组 $F = (W,R)$,其中 W 是非空集合,R 是 W 上的二元关系。最基本的模态语言是在古典命题逻辑基础上增加模态算子□(必然算子)得到的,它是用于谈论框架类或框架类性质的形式语言。那么模态可定义性的基本问题就是:哪些框架类在基本模态语言中可定义? 首先,许多框架类是不能在模态语言中得到反映的。比如有穷框架类、禁自返框架类、禁传递框架类、逆良基框架类等等[3]138-142。如何刻画框架类的模态可定义性成为模态逻辑的重要问题②[4]75-76。哥德布拉特(R. Goldblatt)和托马森(S. K. Thomason)证明了如下著名的可定义性定理[5]163-173:假设 K 是对初等等价封闭的框架类,那么 K 可被某个模态公式集定义当且仅当 K 对不相交并、生成子框架、p-态射封闭,并且 K 的补类对超滤扩张封闭。这条定理的意义在于给出判定对初等等价封闭的框架类是否模

① **收稿日期:**2013 - 03 - 11
基金项目:国家社科基金青年项目(12CZX054)
作者简介:马明辉(1984 -),男,湖北巴东人,博士,副教授,研究员,主要从事符号逻辑、逻辑哲学、现代逻辑史等研究。

② 这种刻画定理在泛代数中也存在,比如著名的 Birkhoff 定理:一个代数类可被代数等式定义当且仅当它对积代数、子代数和同态封闭。

态可定义的依据。

上述定理是从语义方面获得的关于可定义性的重要定理。另一种研究可定义问题的方法是从句法角度研究哪些一阶性质或一阶可定义的框架类在模态语言中可反映。这方面的主要定理是萨奎斯特(H. Sahlqvist)的结论:由萨奎斯特公式定义的框架类都是一阶可定义的,所有由这样的公式生成的正规模态逻辑都是完全的和典范的[6]。该定理的核心是如何从所定义的每个萨奎斯特公式在框架上对应的二阶公式得到逻辑等值的一阶对应公式。本文仅从语义研究的视角对框架类的模态可定义性进行研究。

在模态逻辑的框架类可定义性定理中,一种可能性是可在语言方面作出一些限制,进而得到更多的可定义性定理。这里,我们考虑常逻辑公式,即不含命题变元的公式。我们的问题是:框架类可被常模态公式集定义的充分必要条件是什么?与哥德布拉特定理类似,我们需要一些框架类的封闭条件来刻画可定义性。为此,我们先引入一些框架构造,证明常模态公式在这些构造中的保存结论,进而证明我们所需要的定理。

二　模态语言与框架构造

古典模态逻辑的语言是在古典命题逻辑的语言基础上增加模态算子得到的。固定命题变元集合 Prop,模态公式集合 Fml 由如下规则来定义:

$$A ::= p \mid \bot \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \Box A$$

定义可能算子 $\Diamond A := \neg \Box \neg A$,其它联结词∨、→和↔等如通常定义[2]9。这里,⊥代表零元命题常项“恒假”,其对偶算子 t 代表“恒真”。常模态公式是不含命题变元的公式,即从 t 和⊥运用联结词¬、∨、∧、◇和□构造起来的模态公式。

任给框架 $F = (W, R)$,W 中的元素称为状态。如果 wRv,则称 v 是 w 的 R-后继状态。该框架上一个赋值是一个函数 V,对每个命题变元指派 W 的一个子集。一个模型是三元组 $M = (W, R, V)$,其中 (W, R) 是框架,V 是赋值。在模型中某个状态上公式的真的定义与通常递归定义类似,特别是模态词的解释如下:

(1)□A 在 M 中 w 上是真的当且仅当 A 在 w 的每个 R-后继上都是真的。

(2)◇A 在 M 中 w 上是真的当且仅当 A 在 w 的某个 R-后继上是真的。

公式 A 在 M 上全局真,如果它在 M 中每个状态上都是真的。公式 A 在框架 F 中状态 w 上有效,如果它在每个基于 F 的模型中状态 w 上是真的。公式 A 在框架 F 上有效,如果它在 F 中每个状态上有效。称公式 A 在框架 F 上可满足,如果存在 F 上的模型和状态 w 使 A 真。称公式集 Γ 在 F 上可满足,如果存在 F 上的模型和状态 w 使得 Γ 中所有公式在 w 上真。

对任意常模态公式 A,由于它的真假与赋值无关,所以我们有 A 在模型中某个状态上是真的当且仅当它在底部框架的相应状态上是有效的。对于否定、合取和析取等命题联结词和模态词来说,任给常模态公式 A 和 B,我们有如下结论:

(1)¬A 在框架 F 中 w 上有效当且仅当 A 在 w 上不是有效的。

(2)A∨B 在框架 F 中 w 上有效当且仅当 A 在 w 上有效或者 B 在 w 上有效。

(3)A∧B 在框架 F 中 w 上有效当且仅当 A 在 w 上有效并且 B 在 w 上有效。

(4)◇A 在框架 F 中 w 上有效当且仅当 A 在 w 的某个 R-后继状态上有效。

(5)□A 在框架 F 中 w 上有效当且仅当 A 在 w 的所有 R-后继状态上有效。

(6)□t 在所有框架上有效;◇t 在所有存在后继状态的状态上有效。

(7)□⊥在所有没有后继状态的状态上有效;◇⊥在所有框架上无效。

任给公式集 Γ,定义 Γ 的框架类 $\mathrm{Frm}(\Gamma) = \{F \mid F$ 使 Γ 中每个公式都是有效的$\}$。反之,任给框架类 K,定义 K 的模态理论 $\mathrm{Th}(K) = \{A \mid A$ 在 K 中每个框架上有效$\}$;定义 K 的常模态理论 $\mathrm{Thc}(K) = \{A \mid A$ 是常模态公式并且 A 在 K 中每个框架上有效$\}$。一个框架类 K 是模态可定义的,如果存在模态公式集 Γ 使得 $K = \mathrm{Frm}(\Gamma)$。称 K 是常模态可定义的,如果存在由常模态公式组成的公式集 Γ 使得 $K = \mathrm{Frm}(\Gamma)$。

定义 1:一个代入是一个从命题变元集合 Prop 到模态公式集合的函数 s。任给代入 s,公式 A 在 s 代入后得到的公式记为 A^s,它可递归定义如下:$p^s = s(p)$,$\bot^s = \bot$,$(\neg A)^s = \neg(A^s)$,$(A \wedge B)^s = A^s \wedge B^s$,$(\Box A)^s = \Box(A^s)$。

命题 2:任给公式 A 和模型 $M = (W, R, V)$ 以及模型中的状态 w,令 A 中命题变元为 $p_1, \cdots\cdots, p_n$,令 s 是代入使得对每个命题变元 p_i,如果它在 w 上是真的,那么 $s(p_i) = t$;否则,$s(p_i) = \bot$。那么 A^s 在 F 中 w 上是有效的当且仅当 A 在 M 中 w 上是真的。(对模态公式的构造归纳证明略。)

下面定义一些重要的框架构造,进而证明一些常模态公式在这些框架构造下的保存结论,为证明可定义性定理做准备。

定义 3:任给(不相交)框架族 $\{F_i = (W_i, R_i) \mid i \in I\}$,它的不相交并框架 $\sum_{i \in I} F_i = (W, R)$ 定义为 W_i 是所有并集,R_i 是所有的并集(对于相交框架的情况,可先以增加下标方法构造不相交的复制框架,从而进行不相交并)。

命题 4:任给(不相交)框架族 $\{F_i = (W_i, R_i) \mid i \in I\}$ 和 F_i 中的状态 w,对任何常模态公式 A,如下成立:(i)A 在 $\sum_{i \in I} F_i$ 中状态 w 上有效当且仅当 A 在 F_i 中状态 w 上有效;(ii)A 在 $\sum_{i \in I} F_i$ 上有效当且仅当 A 在所有 F_i 上都是有效的。(对常模态公式的构造归纳证明略。)

由此可知,如果一个框架类 K 是常模态可定义的,那么 K 对不相交并封闭,即如果 $\{F_i = (W_i, R_i) \mid i \in I\} \subseteq K$,那么 $\sum_{i \in I} F_i \in K$。

定义 5：任给框架 $F=(W,R)$ 和 W 的非空子集 X，由 X 得到 F 的生成子框架 $F^X=(W^X,R^X,V^X)$ 定义为：(i) W^X 是 W 的子集使得 $X\subseteq W^X$ 并且 W^X 对 R－后继封闭，即如果 $w\in W^X$ 并且 Rwu，那么 $u\in W^X$；(ii) R^X 是限制到子集 W^X 的关系；(iii) V^X 是限制到子集 W^X 的赋值函数。任给状态 w，由 w 点生成的子框架记为 F^w。称一个框架 F 是点生成的，如果 $F=F^w$ 对其中某个状态 w。

命题 6：令 F^X 是 F 的生成子框架。对任何常模态公式 A 和 F^X 中的状态 w，如下成立：(i) A 在 F 中状态 w 上有效当且仅当 A 在 F^X 中状态 w 上有效；(ii) 如果 A 在 F 上有效，那么 A 在 F^X 上有效。（对常模态公式的构造归纳证明略。）

由此可知，如果一个框架类 K 是常模态可定义的，那么 K 对生成子框架封闭，即如果 $F\in K$，那么对 F 的任何生成子框架 F^X 都有 $F^X\in K$。

定义 7：任给框架 $F=(W,R)$ 和 $G=(T,S)$，一个满射 $f:W\rightarrow T$ 称为从 F 到 G 的 p－态射，如果它满足如下条件：对 W 中任何状态 w 和 u，(i) 如果 wRu，那么 $f(w)Sf(u)$；(ii) 如果 $f(w)Sf(u)$，那么存在 W 中状态 v 使得 wRv 且 $f(v)=f(u)$。此时称 G 是 F 的 p－态射象。

命题 8：令 $f:W\rightarrow T$ 从 $F=(W,R)$ 到 $G=(T,S)$ 的 p－态射。对任何常模态公式 A 和 F 中的状态 w，如下成立：(i) A 在 F 中状态 w 上有效当且仅当 A 在 G 中状态 $f(w)$ 上有效；(ii) 如果 A 在 F 上有效，那么 A 在 G 上有效。（对常模态公式的构造归纳证明略。）

由此可知，如果一个框架类 K 是常模态可定义的，那么 K 对 p－态射象封闭，即如果 $F\in K$，那么对 F 的任何 p－态射象 G 都有 $G\in K$。

定义 9：任给框架 $F=(W,R)$，它的超滤扩张框架 $F^{ue}=(W^{ue},R^{ue})$ 定义为：(i) W^{ue} 是 W 上所有超滤子；(ii) $uR^{ue}v$ 当且仅当对所有 $X\in v$ 有 $m_R(X)\in u$，其中 $m_R(X)=\{x\in W\mid \text{存在 } y\in X \text{ 使 } xRy\}$。

命题 10[2]96：任给框架 F 和模态公式 A，如果 A 在 F^{ue} 上有效，那么 A 在 F 上有效。

由此可知，如果一个框架类 K 是常模态可定义的，那么它的补类对 p－态射象封闭，即如果 $F^{ue}\in K$，那么 $F\in K$。

定义 11：任给框架 $F=(W,R)$ 和 $G=(T,S)$，一个 W 和 T 之间非空二元关系 Z 称为 F 和 G 之间的互模拟，如果对所有 wZx 如下条件成立：(i) 如果 wRu，那么存在 y 使得 xSy 并且 uZy；(ii) 如果 xSy，那么存在 u 使得 Rwu 并且 uZy。如果对 T 中每个状态 x 都存在 F 中状态 w 使得 wZx，则 Z 称为满射互模拟，G 称为 F 的满射互模拟象。

命题 12：任给框架 $F=(W,R)$ 和 $G=(T,S)$，令 Z 是 F 和 G 之间的满射互模拟关系。假设 wZx，那么对所有常模态公式 A，如下成立：(i) A 在 F 中 w 上有效当且仅当 A 在 G 中 x 上有效；(ii) 如果 A 在 F 上有效，那么 A 在 G 上有效。（对常模态公式的构造归纳证明略。）

由此可知，如果一个框架类 K 是常模态可定义的，那么它对满射互模拟象封闭，即如果 $F\in K$，那么对 F 的任何满射互模拟象 G 都有 $G\in K$。

将上述结论综合起来可得更多的结论。首先，任给框架 $F=(W,R)$ 都有 F 是 $\sum_{w\in W}F^w$ 的 p－态射象，即任何框架都是它的所有点生成子框架的不相交并的 p－态射象。其次，根据满射互模拟的定义可得如下结论：(1) 如果 G 是 F 的生成子框架，那么 G 是 F 的满射互模拟象；(2) 如果 G 是 F 的 p－态射象，那么 G 是 F 的满射互模拟象。因此，如果一个框架类对满射互模拟封闭，那么它也对生成子框架和 p－态射象封闭。

三　框架类的常模态可定义性

本节我们给出关于框架类可被常模态公式集定义的刻画定理。首先我们考虑一阶可定义的框架类可被常模态公式集定义的刻画定理。

定理 13：任何一阶可定义的框架类 K 可被常模态公式集定义当且仅当 K 对不相交并和满射互模拟封闭，并且 K 的补类对超滤扩张封闭。

证明：假设 K 可被常模态公式集定义，由命题 4、10 和 12 可知，K 对不相交并和满射互模拟封闭，并且 K 的补类对超滤扩张封闭。反之，假设 K 满足右边的封闭条件。现在证明 K 的常模态理论 $Thc(K)$ 定义 K。显然 K 中所有框架 F 使 $Thc(K)$ 中所有公式有效。反之，假设 F 使 $Thc(K)$ 中所有公式有效，只需证明 $F\in K$。由于 F 是它的所有点生成子框架的不相交并的 p－态射象，根据 K 的封闭条件，不妨设 $F=(W,R)$ 是由 w 生成的框架。令 $L=\{p_X\mid X\subseteq W\}$ 是新命题变元集合，考虑新模态公式集 $Fml(L)$。构造框架 F 上的 L－模型 $M=(F,V)$ 使 $V(p_X)=X$。令 $\Gamma=\{A\in Fml(L)\mid A \text{ 在模型 } M \text{ 中 } w \text{ 上是真的}\}$。现在证明 Γ 在 K 中某个框架上可满足。根据一阶逻辑的模型论，由于 K 是一阶可定义的，只要证明 Γ 的每个有穷子集 Δ 在 K 中某个框架上可满足。若不然，存在 Γ 的有穷子集 Δ 使得对 K 中每个框架 G 和 Δ 中所有公式合取 B 都有 $\neg B$ 在 G 上有效。考虑如下定义的代入 s：对 B 中每个变元 p_X，如果 p_X 在 w 上是真的，那么 $s(p_X)=t$；否则 $s(p_X)=\bot$。由于公式有效性对代入保存，所以 $\neg B^s$ 在 K 中每个框架上有效，$\neg B^s\in Thc(K)$。$\neg B^s$ 在框架 F 上有效，因而 $\neg B^s$ 在 F 中状态 w 上有效。根据命题 2 可知，$\neg B$ 在 M 中 w 上是真的，这与 Δ 是 Γ 的有穷子集矛盾。所以 Γ 在 K 中某个框架上可满足。由此根据哥德布拉特定理的模型论证明方法[7][2]178，可以得到 $F\in K$。证毕。

下面我们再证明另一条相对可定义性定理。称一个框架类 K 相对于框架类 C 是常模态可定义的，如果存在常模态公式集 Γ 使得对 C 中每个框架 F 都有 $F\in Frm(\Gamma)$ 当且仅当 $F\in K$。

我们所要给出的刻画定理是关于有穷传递框架类相对于它本身的常模态可定义性。

任给有穷传递框架 $F=(W,R)$，假设 F 是由状态 w 生成的框架，令 $W=\{w_0,\cdots,w_n\}$，其中 $w=w_0$。对每个 w_i，令 $p\neg_i$ 是相应的命题变元。定义 F 的 Jankov－Fine 公

式 A_F 为如下公式的合取：

(1) $p_0 \vee \cdots \vee p_n$

(2) $\Box(p_0 \vee \cdots \vee p_n)$

(3) $(p_i \to \neg p_j) \wedge \Box(p_i \to \neg p_j)$ 对 $i \neq j \leqslant n$

(4) $(p_i \to \Diamond p_j) \wedge \Box(p_i \to \Diamond p_j)$ 对 $w_i R w_j$

(5) $(p_i \to \neg \Diamond p_j) \wedge \Box(p_i \to \neg \Diamond p_j)$ 对 $\neg w_i R w_j$

对于这样定义的 Jankov - Fine 公式，它有如下重要特点：

命题 14[2]144：任给有穷传递框架 F 和传递框架 G，Jankov - Fine 公式 A_F 在 G 中某个赋值 V 和状态 v 上是真的当且仅当存在从 G 的生成子框架 G^v 到 F 的 p - 态射 f 使得 $f(v) = w$。

定理 15：任何有穷传递框架类 K 相对于所有有穷传递框架类是常模态可定义的当且仅当 K 对（有穷）不相交并和满射互模拟象封闭。

证明：从左至右方向已证明。现在假设 K 满足封闭条件，只要证明 Thc(K) 定义 K。显然 K 中每个框架都使 Thc(K) 中所有公式有效。反之，假设 F 使得 Thc(K) 有效，只要证明 $F \in K$。与定理 13 类似，只要证明 F 的每个点生成子框架属于 K。不妨设 F 是由 w 生成的有穷传递框架。显然 F 的 Jankov - Fine 公式 A_F 在 F 中某个模型 M 中 w 上可满足。考虑代入 s 使得在 w 上真的命题变元替换为 t，否则替换为 ⊥。那么 $(A_F)^s$ 在 F 中 w 上有效，所以 $\neg(A_F)^s \notin$ Thc(K)，那么存在 K 中传递框架 G 使得 $(A_F)^s$ 在某个状态 v 上有效，根据命题 2 可知，G 中存在赋值 V 使得 A_F 在 v 上是真的。根据命题 14 可得，F 是 G 的 p - 态射象，因为 K 对满射互模拟象封闭，所以 $F \in K$。证毕。

四　向直觉主义逻辑的推广

前面关于框架类的常模态可定义性的刻画定理可进一步向直觉主义逻辑推广。我们先对直觉主义逻辑及其克里普克语义的基本概念进行解释。首先，直觉主义逻辑与古典命题逻辑的语言相同。直觉主义逻辑的公式集合 Int 是由如下规则形成的：

$$A ::= p \mid \bot \mid A \to B \mid A \vee B \mid A \wedge B$$

否定定义为 $\neg A := A \to \bot$。直觉主义的框架是有序对 $F = (W, R)$，其中 R 是偏序关系，即满足自返性、传递性和反对称性的二元关系。

一个模型 $M = (W, R, V)$，其中 V 是赋值使得对每个命题变元 p 都有 $V(p)$ 对 R - 后继封闭，即如果 $w \in V(p)$ 并且 Rwu，那么 $u \in V(p)$。除了如下关于蕴涵（及否定）的解释，直觉主义公式的解释与古典命题逻辑相同：

(1) $A \to B$ 在 M 中状态 w 上是真的当且仅当对任何 u 使得 Rwu 都有 A 在 u 上是假的或 B 在 u 上是真的。

(2) $\neg A$ 在 M 中状态 w 真当且仅当对任何 u 使得 Rwu 都有 A 在 u 上假。

在这种解释下，排中律 $A \vee \neg A$ 不是有效的，这是直觉主义逻辑的重要特点。全局真、有效性、可满足、可定义性等其它语义概念的定义与模态逻辑中的定义相同。

直觉主义的常逻辑公式也是不含有命题变元的直觉主义公式。这些公式有一个重要特点，它们在直觉主义逻辑中的有效性与古典命题逻辑中重言式的概念重合，即任何直觉主义的常逻辑公式 A 在所有直觉主义框架上有效当且仅当它是古典命题逻辑的重言式[8]35。

任给直觉主义框架类 K，令 ThInt(K) = {A ∈ Int | A 在 K 中每个直觉主义框架上有效}。令 ThcInt(K) 是所有在 K 中每个直觉主义框架上有效的直觉主义常逻辑公式的集合。下面考虑如何将模态逻辑中有穷传递框架类的相对常模态可定义性结论推广至直觉主义逻辑。

命题 16[8]28-35：任何可被直觉主义的常逻辑公式集定义的直觉主义框架类对不相交并、生成子框架和 p - 态射封闭。

命题 17：任何可被直觉主义的常逻辑公式集定义的直觉主义框架类也对满射互模拟象封闭（对直觉主义的常逻辑公式归纳证明）。

为了将定理 15 推广至直觉主义逻辑，我们需要考虑 Jankov 公式。此外，由于直觉主义框架都是传递框架，这里我们只需考虑有穷的由单个状态生成的直觉主义框架。

命题 18：对每个有穷的由单个状态生成的直觉主义框架 F，存在公式 A_F 使得对每个直觉主义框架 G 都有 A_F 在 G 中可满足当且仅当 F 是 G 的某个点生成子框架的 p - 态射象。

该命题由前苏联逻辑学家 Jankov 提出，它的证明较为容易，这里略去[9]58。由此我们可得到如下两条关于直觉主义框架类的可定义性定理。

定理 19：任何直觉主义有穷框架组成的框架类 K 相对于有穷框架的类可被某个直觉主义公式集定义当且仅当它对不相交并、生成子框架和 p - 态射象封闭。

证明：从左至右的方向由命题 16 可得。反之，假设 K 满足封闭条件。可以证明 ThInt(K) 定义 K。显然 K 中所有框架是 ThInt(K) 的框架。现在假设 F 是有穷直觉主义框架使得 ThInt(K) 中所有公式有效。类似于定理 15，利用 F 的 Jankov 公式可证明所需结论。证毕。

定理 20：任何直觉主义有穷框架组成的框架类 K 相对于有穷框架的类可被某个直觉主义常逻辑公式集定义当且仅当它对不相交并和满射互模拟象封闭。

证明：利用命题 17 以及 Jankov 公式，如果 K 满足所给出的封闭条件，那么可以得到 ThcInt(K) 定义 K。于是可得该定理的结论。证毕。

五　结论及问题

本文所研究的框架类可定义性问题是近 40 年来模态逻辑研究的重要基础问题。在哥德布拉特定理基础上，我们考察框架类可被常模态公式集定义的刻画问题，得到了明确的结论。这个结论还推广到有穷传递框架类的相对常模态可定义性问题。进一步考虑克里普克语义下的直觉主义逻辑，也可以得到两条关于有穷框架的框架类的相对可定义性定理。然而，这个领域仍待逻辑学家进一步探

索，现列出几个相关问题：

（1）任意一阶可定义的直觉主义框架类在直觉主义逻辑中的可定义性问题。这个问题仍未得到解决。我们需要研究类似于模态逻辑中超滤扩张的适合直觉主义逻辑的框架构造，并证明有效性的保存定理以及它与其它框架构造之间的联系。

（2）任意一阶可定义的直觉主义框架类的常逻辑公式可定义性问题。正如我们从一阶可定义的模态框架类的模态可定义性问题下降到常模态可定义性问题，也可以从（1）研究的结论下降到直觉主义常逻辑公式可定义的问题。

（3）哥德布拉特提出了常模态逻辑的典范性问题[10]149－157，所得到的结论如下：假设一个逻辑的框架类及其补类都对 p－态射封闭，那么 L 可被常模态公式公理化当且仅当 L 是典范的，当且仅当 L 是完全的，并且它的框架类是初等的。这个定理显示了常模态公式层次上典范性问题与可定义性问题的联系。如何将它推广至直觉主义逻辑是未解问题。

可定义性理论不仅在上述普通的克里普克框架类上考虑，还可以推广到广义框架。一个广义框架是三元组（W，R，P），其中 P 是 W 的某些子集组成的集合并且满足一定的封闭条件。这样普通的克里普克框架就是这类广义框架的特殊情况。关于广义框架类在模态逻辑中的可定义性问题，哥德布拉特已经给出一些结论[11]47，循着这些结论可进一步研究直觉主义逻辑的可定义性问题。

参考文献：

［1］Van Benthem J. Correspondence Theory［M］. In：D. Gabbay and F. Guenthner ed, Handbook of Philosophical Logic Vol. 2. Reidel, 1984.

［2］Blackburn P, De Rijke M, Venema Y. Modal Logic［M］. Cambridge, Cambridge University Press, 2001.

［3］Blackburn P, Van Benthem J, Wolter F. Handdbook of Modal Logic［M］. Elsevier, 2007.

［4］Burris S, Sankappanavar H P. A course in universal algebra［M］. New York：Springer－Verlag, 1981.

［5］Goldblatt R I, Thomason S K. Axiomatic classes in propositional modal logic［M］//Algebra and logic. Springer Berlin Heidelberg, 1975.

［6］Sahlqvist H. Completeness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic［J］. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 1975, 82：110－143.

［7］Van Benthem J. Modal frame classes revisited［J］. Fundamenta Informatica, 1993, 18：307－317.

［8］Chagrov A, Zakharyaschev M. Modal logic［M］. Oxford：Clarendon Press, 1997.

［9］Bezhanishvili N. Lattices of intermediate and cylindric modal logics［M］. University of Amsterdam, Institute for Logic, Language and Computation, 2006.

［10］Goldblatt R. Constant Modal Logics and Canonicity［C］. Modality Matters. Twenty－Five Essays in Honour of Krister Segerberg, 2006.

［11］Goldblatt R. Mathematics of modality［M］. Stanford, CSLI Publications, 1993.

Constant Logical Formulas and Definability

MA Ming-hui

（Center for the Study of Logic and Intelligence, Southwest University, Chongqing 400715, China）

Abstract：Constant logical formulas are those without propositional variable. They can be used to define classes of structures, while some classes of structures cannot be defined by any set of constant logical formulas. In modal logic, a first－order definable class of frames is definable by a set of constant modal formulas if and only if it is closed under subjective bisimulation images, disjoint unions, while its complement is closed under ultra－filter extensions. A class of finite transitive frames is relatively definable by constant modal formulas if and only if it is closed under subjective bisimulations and disjoint unions. The second theorem can be extended to intuitionistic logic.

Key words：modal logic；intuitionistic logic；frame class；definability

（责任编校　谢宜辰）