第 17 卷 第 2 期 湖南科技大学学报(社会科学版) Vol. 17 No. 2
2014 年 3 月 Journal of Hunan University of Science & Technology(Social Science Edition) Mar. 2014

doi:10.13582/j.cnki.1672-7835.2014.02.005

■ 逻辑今探

基于 K4 的超模态逻辑①

许春梅,刘壮虎

(北京大学 哲学系,北京 100871)

摘　要:D. M. Gabbay 在“超模态逻辑理论:模态逻辑中的模转换”一文中建立了基于任意框架上的超模态逻辑语义学以及第一个超模态逻辑$\mathcal{H}_i^s$。该文旨在于扩充语义学,将任意框架上的超模态逻辑语义学扩充到传递框架上,并尝试构建一个 K4 以上的超模态逻辑 K4[$\dot{\mathrm{T}}$,$\dot{\mathrm{K}}$],主要研究 K4、S4 超模态算子性质,特别是关于它叠置的归约问题。

关键词:超模态算子;传递框架;扩充语义学;翻译定理;K4[$\dot{\mathrm{T}}$,$\dot{\mathrm{K}}$]

中图分类号:B812　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-7835(2014)02-0025-06

A Hypermodal Logic Based on K4

XU Chun-mei & LIU Zhuang-hu

(Department of Philosophy, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: In “A theory of hypermodal logics: Mode shifting in modal logic” D. M. Gabbay founded a semantics of hypermodal logics based on any frame. He is the first one who founded a hypermodal logic $\mathcal{H}_i^s$,. Well, Following Gabbay's paradigm, my thesis is to expand the semantics to transitive frames, based on which we are going to found a logic K4[$\dot{\mathrm{T}}$,$\dot{\mathrm{K}}$]. There, we are going to study the properties of two kinds of hypermodalities K4 and S4, espectially of the problem of nested hypermodalities.

Keywords: hypermodalities; transitive frame; extending semantics; Translation Theorem; K4[$\dot{\mathrm{T}}$,$\dot{\mathrm{K}}$]

一　基于 K4 的超模态逻辑语义学

Michael Gabbay 将所有那些语词的逻辑含义依赖于它在公式中所出现的位置的语词称为“超”(hyper)语词。比如,超量词,同一量词在复合句中的不同位置而含义不同。又如,超模态词,同一模态词在复合句中的不同位置而含义不同。D. M. Gabbay 第一次对这类模态词作了系统地逻辑研究,提出了一种超模态逻辑理论[1],其理论的核心是“模转换”概念。通过“模转换”概念,他建立起了基于任意框架上的超模态逻辑语义学,以及第一个超模态逻辑系统$\mathcal{H}_i^s$。这一成果集中地包含在他 2002 年所发表的“超模态逻辑理论:模态逻辑中的模转换”中。本文的工作旨在于扩充语义学,将任意框架上的超模态逻辑语义学扩充到传递框架上,并尝试构建一个 K4 以上的超模态逻辑 K4[$\dot{\mathrm{T}}$,$\dot{\mathrm{K}}$],主要研究 K4、S4 超模态算子性质,特别是关于它叠置的归约问题。

那么,是否可以用超模态逻辑的思想来刻画传递框架及其以上的框架类上超模态现象呢?原则上

① **收稿日期**:2013-08-19

作者简介:许春梅(1983-),女,福建龙岩人,博士生,主要从事符号逻辑研究。

是可以的。D. M. Gabbay 在“超模态逻辑理论:模态逻辑中的模转换”一文中提到 K4.3[T,K],但是对此并未作详细的讨论。然而,正如 $\varphi_{K4}(x,R,y)=_{df}(\exists_{n\geqslant 1})\ x\ R^n\ y$,我们没有办法将它用一阶的办法写出,因而关于传递关系就很难在超模态逻辑与模态逻辑之间写出它们的翻译公式。这是一大难题。然而,K4 以上又有非常丰富的性质,比如,我们的认知基本上都是建立在传递框架以上的。不过,或许我们可以避难就易,也就是说,当我们在讨论 K4 以上的所有框架时,我们不一定都要以 K 框架作为讨论的基础,也可以尝试以 K4(即传递框架)作为我们讨论问题的平台。特别说明,这一灵感源自于刘壮虎。

令 $\theta(R)$ 表示 R 具有]性质。先定义具有 θ 性质的更为一般的语义框架,然后再定义具有传递性质的框架。

定义 1 [超模态逻辑语义框架]称四元组 $\langle W,R,\mu,\varepsilon\rangle$ 是一个超模态语义框架,当且仅当,(1) W 是任意非空集;(2) R 是 W 上具有 θ 性质的二元关系;(3) $\mu=\{\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_{k-1}\}$,其中,$0\leqslant i\leqslant k-1$;(4) ε 是一个模转换范式函数,即对每个 $0\leqslant i\leqslant k-1$,都有:

当 $0\leqslant i\neq k-1$ 时,$\varepsilon(i)=i+1$;

当 $i=k-1$ 时,$\varepsilon(k-1)=r$,其中,$r\in\{0,1,\cdots,k-1\}$;

因此,给定 θ 性质,实际就给定了框架性质。当 $\theta(R)$ 是 W 上的任意二元关系,则框架 $<W,R,\mu,\varepsilon>$ 是任意框架;当 $\theta(R)$ 是 W 上的传递关系,则框架 $<W,R,\mu,\varepsilon>$ 是传递框架;当 $\theta(R)$ 是 W 上具有自返且传递的性质,则框架 $<W,R,\mu,\varepsilon>$ 是自返传递框架。

下面定义传递框架上的超模态模型和满足关系等基本概念:

定义 2 称五元组 $<W,R,\mu,\varepsilon,h>$ 是一个超模态传递框架上的语义模型,当且仅当,(1) W 是任意非空集;(2) $\theta(R)$ 是 W 上的传递关系;(3) $\mu=\{\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_{k-1}\}$,$|\mu|=k$;(4) ε 是一个模转换范式函数,即对每个 $0\leqslant i\leqslant k-1$,都有:

当 $0\leqslant i\neq k-1$ 时,$\varepsilon(i)=i+1$;

当 $i=k-1$ 时,$\varepsilon(k-1)=r$,其中,$r\in\{0,1,\cdots,k-1\}$;

(5) h 是命题变元集 $P(\mathcal{L})$ 与 W 的笛卡尔积($P(\mathcal{L})\times W$)到集合 $\{0,1\}$ 上的映射,其中,记号“$\mathcal{L}$”表示超模态语言,超模态语言与模态语言是相同的,而且它们的合式公式的形成规则也相同。

$h: P(\mathcal{L})\times W\rightarrow\{0,1\}$;

定义 3 设 $\mathcal{M}=<W,R,\mu,\varepsilon,h>$ 是任一超模态传递框架上的模型,其中 $\mu=\{\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_{k-1}\}$,$0\leqslant i\leqslant k-1$,$<\mu,\varepsilon>$ 是模转换范式。α 是超模态公式,对于任意 $t\in W$,则满足关系 $t<_i 0$ 由下列规则定义:

(1) 当 α 是命题变元 p 时,$t\vDash_i p$ 当且仅当 $h(p,t)=1$。

(2) $t\vDash_i\alpha$ 当且仅当 $t\nvDash_i 0$。

(3) $t\vDash_i\alpha\wedge\beta$ 当且仅当 $t\vDash_i\alpha$ 且 $t\vDash_i\beta$。

(4) $t\vDash_i\Box\alpha$ 当且仅当 $\forall_s(\varphi 1(t,s)\rightarrow s\vDash_{\varepsilon(i)}\alpha)$。

如果存在 $t\in W$,使得 $t\vDash_0\alpha$,则称 α 在模型 $\mathcal{M}$ 上是可满足的。

定义 4 设 $<W,R,\mu,\varepsilon,h>$ 是任意基于传递框架上的超模态语义模型。对于任意 $\alpha\in Form(\mathcal{L})$,其中,记号“$Form(\mathcal{L})$”表示超模态语言的合式公式集。如果对任意 $t\in W$,都有 $t\vDash_0\alpha$,则称 α 在模型 $<W,R,\mu,\varepsilon,h>$ 上是有效的,简记为 $<W,R,\mu,\varepsilon,h>\ \vDash_0\alpha$。

定义 5 设 F 是任意超模态语义的传递框架,α 是任意公式,α 在框架 F 上有效,记作 $F\vDash_0\alpha$,当且仅当,对 F 上的任意赋值 h 都有 $<F,h>\vDash_0\alpha$。

定义 6 设 $\mathcal{F}$ 是任意传递框架类,α 是任一公式,α 在框架类 $\mathcal{F}$ 上有效,记作 $\vDash_0\alpha$,当且仅当,对 $\mathcal{F}$ 上的任意传递框架 F 都有 $F\vDash_0\alpha$。

定义 7　对于任意传递框架类$\mathcal{F}$ = { < W，R，μ，ε > | W 是任意的非空集，R 是 W 上的任意传递关系，⟨μ，ε⟩是模转换范式}。令$\mathcal{L}$ = {α| $\mathcal{F}\vDash_0\alpha$}，则称$\mathcal{L}$是超模态逻辑。如果公式 $\beta\in\mathcal{L}$，则称 β 是超模态逻辑$\mathcal{L}$的定理。

二　超模态逻辑 K4[$\dot{T}$，$\dot{K}$]

这部分，我们将给出基于传递框架的超模态逻辑 K4[$\dot{T}$，$\dot{K}$]。

定义 8　给定传递框架类$\mathcal{F}$ = { < W，R，μ，ε > | W 是任意的非空集，R 是 W 上的任意传递关系，< μ，ε > 是模转换范式}，其中：

(1) $\mu=\{\varphi_0,\varphi_1\}$，且 $|\mu|=2$；

(2) $\varphi_0=\varphi_T(s,R,t)=_{df}sRt\ \vee\ s=t$；

$\varphi_0=\varphi_k(s,R,t)=_{df}sRt$；

(3) $\varepsilon(0)=1$；$\varepsilon(1)=0$；

令 K4[$\dot{T}$，$\dot{K}$] = {α| $\mathcal{F}\vDash_0\alpha$}，则称 K4[$\dot{T}$，$\dot{K}$]是超模态逻辑。如果公式 β ∈ K4[$\dot{T}$，$\dot{K}$]，则称 β 是超模态逻辑 K4[$\dot{T}$，$\dot{K}$]的定理。

下面，以公式$\Box p\to p$ 和$\Box p\to\Box\Box p$ 为例，讨论公式在模型上的满足情况。

给定模型 < W，R，φ_0，φ_1，ε，h >，其中，W = {a，x，y}，φ_0 = { < a，a >， < a，x >， < a，y > }，φ_1 = { < x，y > }；h(p，a) = h(p，x) = h(p，y) = 1。

● 由 h(p，a) = 1 和 h(p，y) = 1，所以 $a\vDash_0 p$ 和 $y\vDash_0 p$；

● 由 h(p，x) = 1 和 h(p，y) = 1，所以 $x\vDash_1 p$ 且 $y\vDash_1 p$。再由 φ_0 = { < a，a >， < a，x >， < a，y > }和 ε(0) = 1，得 $a\vDash_0\Box p$；

● 由 $a\vDash_0 p$ 和 $a\vDash_0\Box p$，得 $a\vDash_0\Box p\to p$；

● 由 φ_1 = { < x，y > }，$y\vDash_0 p$ 以及 ε(1) = 0，得 $x\vDash_1\Box p$；

● 由 φ_0 = { < a，a >， < a，x >， < a，y > }，$x\vDash_1\Box p$ 和 $y\vDash_1\Box p$ 以及 ε(0) = 1，得 $a\vDash_0\Box\Box p$；

● 由 $a\vDash_0\Box p$ 和 $a\vDash 0\ \Box\Box p$，得 $a\vDash_0\Box p\to\Box\Box p$；

定义 9　[从超模态逻辑 K4[$\dot{T}$，$\dot{K}$]到模态逻辑 K4 的翻译]我们定义两种从超模态逻辑 K4[$\dot{T}$，$\dot{K}$]到模态逻辑 K4 的翻译 τ_0，τ_1。对于任意 i = 0，1。

(1) $\tau_i(p)=p$，p 是命题变元。

(2) $\tau_i(A\wedge B)=\tau_i(A)\ \wedge\ \tau_i(B)$。

(3) $\tau_i(\neg A)=\neg\ \tau_i(A)$。

(4) $\tau_0(\Box A)=\tau_1(A)\ \wedge\ \Box\tau_1(A)$。

(5) $\tau_1(\Box A)=\Box\tau_0(A)$。

以公式 $\Box^2p\to\Box p$ 和$\Box^3p\to\Box^2p$ 为例，它是如何翻译到模态逻辑 K4 上呢？

根据翻译定义，对于任意 i = 0，1 都有：

(1) $\tau_i(p)=p$；

(2) $\tau_0(\Box p)=\tau_1(p)\ \wedge\ \Box\tau_1(p)=p\ \wedge\ \Box p$；$\tau_1(\Box p)=\Box\tau_0(p)=\Box p$；

(3) $\tau_0(\Box^2p)=\tau_1(\Box p)\ \wedge\ \Box\tau_1(\Box p)=\Box p\ \wedge\ \Box\Box p$；$\tau_1(\Box^2p)=\Box\ \tau_0(\Box p)=\Box(p\ \wedge\ \Box p)$；

(4) $\tau_0(\Box^3p)=\tau_1(\Box^2p)\ \wedge\ \Box\tau_1(\Box^2p)=\Box(p\ \wedge\ \Box p)\ \wedge\ \Box\Box(p\ \wedge\Box p)$；$\tau_1(\Box^3p)=\Box\tau_0(\Box^2p)=\Box(\Box p\ \wedge\ \Box\Box p)$；

所以，

$\tau_0(\Box\Box p \to \Box p) = \tau_0(\Box\Box p) \to \tau_0(\Box p) = \Box p \wedge \Box\Box p \to p \wedge \Box p$

$\tau_0(\Box^3 p \to \Box^2 p) = \tau_0(\Box^3 p) \to \tau_0(\Box^2 p) = \Box(p \wedge \Box p) \wedge \Box\Box(p \wedge \Box p) \to \Box p \wedge \Box\Box p$

引理 1 表明在超模态逻辑 K4$[\dot{T},\dot{K}]$和模态逻辑 K4 之间存在翻译定理。

引理 1　令$\mathcal{M} = <W,R,\varphi_0,\varphi_1,\varepsilon,h>$, W 是任意非空集, R 是 W 上的任意传递关系,对于任意 $t \in W$, A 是任意合适公式。令$\vDash_0$ 和$\vDash_1$ 都是前面所定义的满足关系,$\vDash$是模态逻辑 K4 的满足关系。对于任意 $i \in [0,1]$,下列成立:

$t \vDash i$ A 当且仅当 $t \vDash \tau_i(A)$　　　　(*)

证明:用结构归纳法。

(1)对于命题变元 p,$t \vDash_i p$ 当且仅当 $h(p,t) = 1$ 当且仅当 $h(\tau_i(p),t) = 1$ 当且仅当 $t \vDash \tau_i(p)$ 当且仅当 $t \vDash p$,因此结论(*)成立。

(2)对于$\wedge$ 和$\neg$ 这两种情况,由归纳假设和翻译定义直接就可以得到结论。

(3) $t \vDash_0 \Box A$ 当且仅当 $\forall_s(tRs \vee t = s \to s \vDash_1 A)$ 当且仅当(根据归纳假设) $\forall_s(tRs \vee t = s \to s \vDash \tau_1(A))$ 当且仅当 $t \vDash \tau_1(A) \wedge \Box\tau_1(A)$ 当且仅当 $t \vDash \tau_0(\Box A)$。

(4) $t \vDash_1 \Box A$ 当且仅当$\forall_s(tRs \to s \vDash_0 A)$ 当且仅当(由归纳假设) $\forall_s(tRs \to s \vDash \tau_0(A))$ 当且仅当 $t \vDash \Box\tau_0(A)$ 当且仅当 $t \vDash \tau_1(\Box A)$。

定理 1　$\Box^{1+2k} p \to \Box^{2k} p$ 是超模态逻辑 K4$[\dot{T},\dot{K}]$的定理,其中 $k \geqslant 0$。　　　　(*)

证明:由于模态逻辑 K$\subseteq$K4,而超模态逻辑 K$[\dot{T},\dot{K}]$和 K4$[\dot{T},\dot{K}]$又分别与模态逻辑 K 和 K4 之间具有翻译定理。又因为$\Box^{1+2k} p \to \Box^{2k} p \in K[\dot{T},\dot{K}]$,因此,$\Box^{1+2k} p \to \Box^{2k} p \in K4[\dot{T},\dot{K}]$。

定理 2　$\Box p \to \Box\Box p$ 是超模态逻辑 K4$[\dot{T},\dot{K}]$的定理。

证明:如不然,则存在模型$\mathcal{M} = \langle W,R,\varphi_0,\varphi_1,\varepsilon,h\rangle$,$a \in W$,使得 $a \nvDash_0 \Box p \to \Box\Box p$。据翻译定理,$a \nvDash \tau_0(\Box p \to \Box\Box p)$,即 $a \nvDash p \wedge \Box p \to \Box p \wedge \Box\Box p$,于是,$a \nvDash p \wedge \Box p$ 且 $a \nvDash \Box p \wedge \Box\Box p$,所以,$a \vDash p$,$a \vDash \Box p$,且 $a \nvDash \Box\Box p$。据 $a \nvDash \Box\Box p$ 当且仅当$\exists_x \exists_y(aRx \wedge xRy \to y \nvDash p)$ 当且仅当$\exists_x \exists_y(aRx \wedge xRy \to y \notin h(p))$。由 R 具有传递性,所以,如果 $aRx \wedge xRy$,那么,aRy。又因为 $a \vDash \Box p$ 当且仅当$\forall_s(aRs \to s \in h(p))$,所以 $y \in h(p)$,这与 $y \notin h(p)$相矛盾。故,命题成立。

引理 2　$\Box\Box p \to p \notin K4[\dot{T},\dot{K}]$。

证明:$\tau_0(\Box\Box p \to p) = \Box p \wedge \Box\Box p \to p$ 不是 K4 定理,据翻译定理,$\Box\Box p \to p \notin K4[\dot{T},\dot{K}]$。

引理 3　$p \to \Box\Box p \notin K4[\dot{T},\dot{K}]$。

证明:$\tau_0(p \to \Box\Box p) = p \to \Box p \wedge \Box\Box p$ 不是 K4 定理,据翻译定理,$p \to \Box\Box p \notin K4[\dot{T},\dot{K}]$。

引理 4　$\Box\Box p \to \Box p \notin K4[\dot{T},\dot{K}]$。

证明:由于 $\tau_0(\Box\Box p \to \Box p) = \Box p \wedge \Box\Box p \to p \wedge \Box p$,而公式$\Box p \wedge \Box\Box p \to p \wedge \Box\Box p$ 不是 K4 定理,据翻译定理,$a \nvDash_0 \Box\Box p \to \Box p$,因此,$\Box\Box p \to \Box p \notin K4[\dot{T},\dot{K}]$。

定理 3　$\Box p \to \Box^k p \notin K4[\dot{T},\dot{K}]$。

证明:施归纳于 $k \geqslant 0$。

(1)当 $k = 0$ 时,$\Box p \to p \in K4[\dot{T},\dot{K}]$,显然。

(2)假设 $k = h > 0$,是偶数,则有$\Box p \to \Box^h p \in K4[\dot{T},\dot{K}]$。由翻译定理,$\tau_0(\Box p \to \Box^h p) \in$ K4,即 $\tau_0(\Box p \to \Box^h p) = p \wedge \Box p \to \Box^{\frac{h}{2}} p \wedge \Box^{\frac{h+1}{2}} p \wedge \cdots \wedge \Box^h p$ 是 K4 定理,其中,$\frac{h}{2}$表示 h 除以 2 所得的商的整数,例如$\frac{5}{2} = 2$,$\frac{8}{2} = 4$。由于 h 是偶数,所以,$\Box^{\frac{h}{2}} p = \Box^{\frac{h+1}{2}} p$。根据 K4 传递性,$\Box^h p \to \Box^{h+1} p \in$ K4,

则$\Box^{h} p \to \Box^{h} p \wedge \Box^{h+1} p \in K4$。于是,$\Box^{\frac{h}{2}} p \wedge \Box^{\frac{h+1}{2}} p \wedge \cdots \wedge \Box^{h-1} pp \wedge \Box^{h} p \to \Box^{\frac{h}{2}} p \wedge \Box^{\frac{h+1}{2}} p \wedge \cdots \wedge \Box^{h-1} pp \wedge \Box^{h} p \wedge \Box^{h+1} p = \tau 0(\Box^{h} p \to \Box^{h+1} p)$,是 K4 定理,据翻译定理,$\Box^{h} p \to \Box^{h+1} p \in K4[\dot{T},\dot{K}]$。由假设和三段论,$\Box p \to \Box^{h+1} p \in K4[\dot{T},\dot{K}]$。

(3)假设 $k = h > 0$,是奇数,则有$\Box p \to \Box^{h} p \in K4[\dot{T},\dot{K}]$。由翻译定理,$\tau_0(\Box p \to \Box^{h} p) \in K4$,即 $\tau_0(\Box p \to \Box^{h} p) = p \wedge \Box p \to \Box^{\frac{h}{2}} 0\ p \wedge \Box^{\frac{h+1}{2}} p \wedge \cdots \wedge \Box^{h} p$ 是 K4 定理。由于 h 是奇数,根据 K4 传递性,$\Box^{\frac{h}{2}} 0\ p \to \Box^{\frac{h+1}{2}} p \in K4$,$\Box^{\frac{h+1}{2}} p \to \Box^{\frac{h+2}{2}} p \in K4, \cdots, \Box^{h} p \to \Box^{h+1} p \in K4$。于是,$\Box^{\frac{h}{2}} 0\ p \wedge \Box^{\frac{h+1}{2}} p \wedge \cdots \wedge \Box^{h-1} pp \wedge \Box^{h} p \to \Box^{\frac{h+1}{2}} p \wedge \Box^{\frac{h+2}{2}} p \wedge \cdots \wedge \Box^{h-1} pp \wedge \Box^{h} p \wedge \Box^{h+1} p = \tau_0(\Box^{h} p \to \Box^{h+1} p) \in K4$,据翻译定理,$\Box^{h} p \to \Box^{h+1} p \in K4[\dot{T},\dot{K}]$。由假设和三段论,$\Box p \to \Box^{h+1} p \in K4[\dot{T},\dot{K}]$。

定理 4　$\Box^{2k} p \to \Box^{1+2k} p \in K4[\dot{T},\dot{K}]$,其中 $k \geqslant 1$。

证明:施归纳于 $k \geqslant 1$。

(1)当 $k = 1$ 时,$\tau_0(\Box^{2} p \to \Box^{3} p) = \Box p \wedge \Box^{2} p \to \Box p \wedge \Box^{2} p \wedge \Box^{3} p \in K4$。据翻译定理,$\Box^{2} p \to \Box^{3} p \in K4[\dot{T},\dot{K}]$。

(2)假设 $k = h \geqslant 1$ 时,$\Box^{2h} p \to \Box^{1+2h} p \in K4[\dot{T},\dot{K}]$。据翻译定理,$\tau_0(\Box^{2h} p \to \Box^{1+2h} p) \in K4$,即$\Box^{h} p \to \Box^{h+1} p \wedge \cdots \wedge \Box^{2h} p \to \Box^{h} p \to \Box^{h+1} p \wedge \cdots \wedge \Box^{2h} p \wedge \Box^{2h+1} p \in K4$。使用一次必然化规则,得$\Box^{h+1} p \wedge \Box^{h+1+1} p \wedge \cdots \wedge \Box^{2h+1} p \to \Box^{h+1} p \wedge \Box^{h+1+1} p \wedge \cdots \wedge \Box^{2h+1} p \wedge \Box^{2h+1+1} p \in K4$。由于$\Box^{2h+2} p \to \Box^{2h+3} p \in K4$,所以,$\Box^{h+1} p \wedge \Box^{h+1+1} p \wedge \cdots \wedge \Box^{2h+1} p \wedge \Box^{2h+2} p \to \Box^{h+1} p \wedge \Box^{h+1+1} p \wedge \cdots \wedge \Box^{2h+1} p \wedge \Box^{2h+2} p \wedge \Box^{2h+3} p \in K4$。由于$\Box^{h+1} p \wedge \Box^{h+1+1} p \wedge \cdots \wedge \Box^{2h+1} p \wedge \Box^{2h+2} p \to \Box^{h+1} p \wedge \Box^{h+1+1} p \wedge \cdots \wedge \Box^{2h+1} p \wedge \Box^{2h+2} p \wedge \Box^{2h+3} p = \tau_0(\Box^{2(h+1)} p \to \Box^{1+2(h+1)} p) \in K4$。据翻译定理,$\Box^{2(h+1)} p \to \Box^{1+2(h+1)} p \in K4[\dot{T},\dot{K}]$,即当 $k = h+1$ 时,结论也成立。

推论 1　$\Box^{2k} p \to \Box^{1+2k} p \in K4[\dot{T},\dot{K}]$,其中 $k \geqslant 1$。

证明:由定理 1 和定理 4,据等值构成,有$\Box^{2k} p \leftrightarrow \Box^{1+2k} p \in K4[\dot{T},\dot{K}]$,其中 $k \geqslant 1$。

定理 5　$\Box^{2k} p \to \Box^{2k} + 2\ p \in K4[\dot{T},\dot{K}]$,其中 $k \geqslant 1$。

证明:施归纳于 $k \geqslant 1$。

(1)当 $k = 1$ 时,$\tau_0(\Box^{2} p \to \Box^{4} p) = \Box p \wedge \Box\Box p \to \Box^{2} p \wedge \Box^{3} p \wedge \Box^{4} p \in K4$,据翻译定理,$\Box^{2} p \to \Box^{4} p \in K4[\dot{T},\dot{K}]$。

(2)假设 $k = h$ 时,$\Box^{2h} p \to \Box^{2h+2} p \in K4[\dot{T},\dot{K}]$,据翻译定理,$\tau_0(\Box^{2h} p \to \Box^{2h+2} p) \in K4$,即$\Box^{h} p \wedge \Box^{h+1} p \wedge \cdots \wedge \Box^{2h} p \to \Box^{h} p \wedge \Box^{h+1} p \wedge \cdots \wedge \Box^{2h} p \wedge \Box^{2h+1} p \wedge \Box^{2h+2} p \in K4$。使用一次必然化规则,得$\Box^{h+1} p \wedge \Box^{h+1+1} p \wedge \cdots \wedge \Box^{2h+1} p \to \Box^{h+1} p \wedge \Box^{h+1+1} p \wedge \cdots \wedge \Box^{2h+1} p \wedge \Box^{2h+1+1} p \wedge \Box^{2h+2+1} p \in K4$。由于$\Box^{2h+2} p \to \Box^{2h+4} p \in K4$,所以,$\Box^{h+1} p \wedge \Box^{h+2} p \wedge \cdots \wedge \Box^{2h+1} p \wedge \Box^{2h+2} p \to \Box^{h+1} p \wedge \Box^{h+2} p \wedge \cdots \wedge \Box^{2h+1} p \wedge \Box^{2h+2} p \wedge \Box^{2h+3} p \wedge \Box^{2h+4} p \in K4$。由于$\Box^{h+1} p \wedge \Box^{h+2} p \wedge \cdots \wedge \Box^{2h+1} p \wedge \Box^{2h+2} p \to \Box^{h+1} p \wedge \Box^{h+2} p \wedge \cdots \wedge \Box^{2h+1} p \wedge \Box^{2h+2} p \wedge \Box^{2h+3} p \wedge \Box^{2h+4} p = \tau_0(\Box^{2(h+1)} p \to \Box^{2(h+1)+2} p) \in K4$。据翻译定理,$\Box^{2(h+1)} p \to \Box^{2(h+1)+2} p \in K4[\dot{T},\dot{K}]$,即当 $k = h+1$ 时,结论也成立。

引理 5　$\Box^{2k+2} p \to \Box^{2k} p \to K4[\dot{T},\dot{K}]$,其中 $k \geqslant 1$。

证明:施归纳于 $k \geqslant 1$。

(1)当 $k = 1$,由于 $\tau_0(\Box^{4} p \to \Box^{2} p) = \Box^{2} p \wedge \Box^{3} p \wedge \Box^{4} p \to \Box p \wedge \Box^{2} p \notin K4$,据翻译定理,$\Box^{4} p \to \Box^{2} p \notin K4[\dot{T},\dot{K}]$。

(2)假设 $k = h$ 时,$\Box^{2h+2} p \to \Box^{2h} p \notin K4[\dot{T},\dot{K}]$,即存在一个模型$\mathcal{M} = \langle W, R, \varphi_0, \varphi_1, \varepsilon, h \rangle$, $a \in W$,使得 $a \vDash_0 \Box^{2h+2} p \to \Box^{2h} p$,据翻译定理,$a \nvDash \tau_0(\Box^{2h+2} p \to \Box^{2h} p)$,即 $a \vDash \Box^{h+1} p \wedge \cdots \wedge \Box^{2h+2} p$,且 $a \nvDash$

$\Box^{h+1}p\wedge\cdots\wedge\Box^{2h}p$。用反证法。假设当 $k=h+1$ 时,$\Box^{2(h+1)+2}p\rightarrow\Box^{2(h+1)}p\in K4[\dot{T},\dot{K}]$,据翻译定理,那么,对于任意模型$\mathcal{M}=<W,R,\varphi_0,\varphi_1,\varepsilon,h>$,任意 $t\in W$,都有 $t\vDash\tau_0(\Box^{2(h+1)+2}p\rightarrow\Box^{2(h+1)}p)$ 当且仅当 $t\vDash\Box^{h+1}p\wedge\cdots\wedge\Box^{2h+2}p\wedge\Box^{2h+3}p\wedge\Box^{2h+4}p$ 且 $t\nvDash\Box^{h+1}p\wedge\cdots\wedge\Box^{2h+2}p$,这与假设存在 a,使得 $a\vDash\Box^{h+1}p\wedge\cdots\wedge\Box^{2h+2}p$ 相矛盾。故当 $k=h+1$ 时,$\Box^{2(h+1)+2}p\rightarrow\Box^{2(h+1)}p\notin K4[\dot{T},\dot{K}]$。

推论 2 $\Box^{2k+2}p\leftrightarrow\Box^{2k}p\notin K4[\dot{T},\dot{K}]$,其中 $k\geqslant1$。

证明:由定理 5 和引理 5,得证。

根据推论 1 和推论 2,可以得到超模态算子□连续叠置的归约情况(其中 $k\geqslant 1$):

$-,\ \Box,\ \Box\Box,\ \Box\Box\Box,\cdots,\ \Box^{2k}$

$\neg\ ,\neg\ \Box,\neg\ \Box\Box,\neg\ \Box\Box\Box,\ \cdots,\ \neg\ \Box^{2k}$ (*)

如果引入□的对偶算子◇,由于 $\Box p\ =_{df}\neg\ \Diamond\neg\ p$,则(*)实际相当于:

$\neg\ ,\Diamond,\Diamond\Diamond,\Diamond\Diamond\Diamond,\cdots,\Diamond^{2k}$

下面两个命题表明必然化规则和等值替换规则在超模态逻辑 $K4[\dot{T},\dot{K}]$ 中不成立。不过,定理 6 则证明了逻辑 $K4[\dot{T},\dot{K}]$ 有$\Box^{2k}$-规则。所谓$\Box^{2k}$-规则,是指如果公式 A 是超模态逻辑 $K4[\dot{T},\dot{K}]$ 的定理,那么,$\Box^{2k}A$ 也是定理,其中 $k\geqslant0$。

命题 1 [必然化规则不成立]存在公式 A,使得 $A\in K4[\dot{T},\dot{K}]$,且 $\Box A\notin K4[\dot{T},\dot{K}]$。

证明:只需举一反例。因为 $\tau_0(\Box p\rightarrow p)=p\wedge\Box p\rightarrow p$ 是 K4 定理,据翻译定理,$\Box p\rightarrow p\in K4[\dot{T},\dot{K}]$。而 $\tau_0(\Box(\Box p\rightarrow p))=(\Box p\rightarrow p)\wedge\Box(\Box p\rightarrow p)$ 不是 K4 定理,据翻译定理,$\Box(\Box p\rightarrow p)\notin K4[\dot{T},\dot{K}]$。

定理 6 对任意公式 A,如果 $A\in K4[\dot{T},\dot{K}]$,那么$\Box^{2k}A\in K4[\dot{T},\dot{K}]$,其中 $k\geqslant 0$。

证明:用施归纳于 $k\geqslant0$。

(1)当 $k=0$ 时,显然。

(2)假设 $k=h$,有$\Box^{2h}A\in K4[\dot{T},\dot{K}]$,据据翻译定理,$\tau_0(\Box^{2h}A)\in K4$,多次用必然化规则,可得$\Box\tau_0(\Box^{2h}A)$,$\Box^2\tau_0(\Box^{2h}A)$,都是 K4 定理。用合取原则,$\Box\tau_0(\Box^{2h}A)\wedge\Box^2\tau_0(\Box^{2h}A)=\tau_1(\Box^{2h+1}A)\wedge\Box\tau_1(\Box^{2h+1}A)=\tau_0(\Box^{2h+2}A)$,是 K4 定理。由翻译定理,$\Box^{2(h+1)}A\in K4[\dot{T},\dot{K}]$。

命题 2 [等值替换规则不成立]存在公式 A,B,使得 $A\leftrightarrow B\in K4[\dot{T},\dot{K}]$,但 $\Box A\leftrightarrow\Box B\notin K4[\dot{T},\dot{K}]$。

证明:由于 $T\leftrightarrow A\in K4[\dot{T},\dot{K}]$,所以,$A\in K4[\dot{T},\dot{K}]$。据翻译定理,有$\Box A\notin K4[\dot{T},\dot{K}]$。因此,$\Box T\leftrightarrow\Box A\notin K4[\dot{T},\dot{K}]$成立。

三 结 语

本文的主要工作是对超模态语义学作扩充,其创新之处就是在传递框架上讨论 K4 以上的超模态现象,通过建立起与 K4 模态逻辑间的翻译定理,从而实现了对一大类传递框架上的超模态逻辑的讨论。与超模态逻辑$\mathcal{H}_1^s$,相同,超模态逻辑 $K4[\dot{T},\dot{K}]$ 不是框架完全的[1]。

参考文献:

[1] D. M. Gabbay. A theory of hypermodal logics: Mode shifting in modal logic[J]. Journal of Philosophical Logic,2002(31):211-243.

(责任校对 龙四清)