doi:10.13582/j.cnki.1672-7835.2019.04.005

自指语句赋值与元胞自动机的动态特征之比较研究①

李振宇

(南京大学 哲学系,江苏 南京 210023)

摘　要:Patrick Grim 等人运用计算机模拟研究方法,揭示出在Łukasiewicz 模糊逻辑系统中自指语句赋值具有周期性和混沌行为等动态特征,而且在系统内混沌行为本身不可判定。元胞自动机同样具有周期性与混沌行为,而 Mikhail Prokopenk 等人通过构造“自指”,证明元胞自动机的动态也同样具有不可判定性。对两者进行比较研究,有助于进一步揭示它们之间的内在关联。

关键词:计算机模拟方法;自指;混沌;元胞自动机;不可判定性

中图分类号:B81　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-7835(2019)04-0029-07

计算机模拟研究方法是美国学者 Patrick Grim 等人使用的一种哲学研究方法,试图运用计算机模拟手段解决哲学问题。其中对于自指语句所导致的语义悖论的研究,是使用该方法所做工作的重要组成部分。他们以Łukasiewicz 模糊逻辑为基本框架,通过将自指语句翻译为简单的迭代函数,利用计算机所生成的图像,成功地揭示出悖论语句的动态特征,并且从复杂性的角度上,对悖论语句进行了分类:一类是简单的周期性震荡(或趋向不动点),一类则形成复杂的混沌图像。另一方面,随着近年来系统科学界对元胞自动机研究的深入,系统科学家们也提出了对元胞自动机的四种分类。其中,前三类元胞自动机的动态特征和自指语句的三类行为——趋向不动点、周期性震荡、混沌等特征高度吻合。对于第四类元胞自动机的不可判定性现象,虽然尚无自指语句的赋值特征与之相对应,但可以找到一种与算术系统密切相关的悖论。与此同时,Grim 等人所提出的混沌不可判定性定理 I①,以及 Kauffuman 等人所提出的元胞自动机的不可判定性定理②,具有技术上的相似性。显然,对两者进行比较研究,有助于进一步揭示它们之间的内在关联。

一　基于Łukasiewicz 模糊逻辑对真谓词的刻画

对说谎者悖论进行分析,是计算机模拟研究方法探讨自指语句动态性质的第一个切入点。导致该悖论的是如下悖论性语句 L:

L:L 是假的。

根据经典逻辑原则可以得出:L 为真,当且仅当 L 为假。在经典逻辑框架下,对任一语句 A 和真谓词 T,如果承认下述 T 模式的普遍有效性:

T(‘A’)↔A(‘A’是真的,当且仅当 A)

那么,在一个形式语言中,总会存在语义悖论。因而,对 T 模式进行修正,或者对经典二值逻辑法则进行修正,均可在技术上提供一种对说谎者悖论的解决思路。Grim 等人在利用“计算机模拟研究方法”刻画语义悖论的过程中,不但用Łukasiewicz 模糊逻辑作为基本框架,还对真谓词进

①　**收稿日期**:2019-01-17

基金项目:国家社科基金重大项目(18ZDA031)

作者简介:李振宇(1983-),男,北京丰台人,博士生,主要从事现代逻辑与逻辑哲学研究。

①Gary Mar, Patrick Grim. “Pattern and Chaos:New Images in the Semantics of Paradox”, *Nous*, *Vol.*25, 1991, pp. 659-695.

②Mikhail Prokopenko, Michael harre, Joseph Lizier, Fabio Boschetti, Pavlos Pepas, Stuart Kauffman. *Self-referential basis of undecidable dynamics: from The Liar Paradox and The Halting Problem to The Edge of Chaos*, 2019, arXiv:1711.02456v2[cs.LO].

行了新的解释。

在Łukasiewicz 模糊逻辑框架下,一般在二值逻辑下导致悖论的自指语句(譬如语句 L)在真值区间[0,1]内皆可找到不动点,而且如果对一些自指语句赋以不动点之外的初值,则其迭代可能出现混沌行为。

在Łukasiewicz 模糊逻辑系统$Ł_1$中,若以 V(A)、V(B)等代表语句的赋值,则复合语句的赋值可表示如下:

1. $V(\neg A) = 1-V(A)$;
2. $V(A\rightarrow B) = \min\{1,(1-V(A)+V(B))\}$;
3. $V(A\&B) = \max(0, V(A)+V(B)-1)$;
4. $V(A\triangledown B) = \min(1,V(A)+V(B))$;
5. $V(A\wedge B) = \min(V(A), V(B))$;
6. $V(A\vee B) = \max(V(A), V(B))$;

其中,∧ 和∨分别为经典逻辑当中的合取和析取。“→”“&”“▽”三个联结词则表示模糊蕴涵、模糊合取与模糊析取。对于逻辑等价的定义,则借助了模糊蕴涵和经典合取连接词:

$V(A\leftrightarrow B) = V((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)) = \min(\min(1,(1-V(A)+V(B))), \min(1,(1-V(B)+V(A)))) = 1-\mathrm{abs}(V(A)-V(B))$

简单起见,在Łukasiewicz 逻辑中直接加入真谓词 T(X)、语句名称‘A’和一个语句常项⊤,形成新语言$Ł_1Tr$。定义 $V(\top)=1$,则对于真谓词的定义如下:

7. $V(T(‘A’)) = V(\top\leftrightarrow A) = 1-\mathrm{abs}(1-V(A))$

从这个赋值定义来说,断定语句 A 为真,即断定语句 A 和真值为 1 的语句等值。显然,在该定义下,对任一语句 A 而言,T 模式成立:

8. $V(T(‘A’)\leftrightarrow A) = 1-\mathrm{abs}((1-\mathrm{abs}(1-V(A))-V(A)) = 1$

根据 7,进而可以得出:$V(T(‘A’)) = V(A)$。其中,公式 8 最早由 Nicolas Rescher 提出,而 Grim 等人在早期的工作吸取了这个理论①。但是在他们后续的工作中,则改为直接假定 T 模式成立,未再提及 Rescher 公式②。他们引入了一类特殊的命题符号[v],表示任一真值为 v 的命题。对于断定像“‘A’为 0.75 真”这样的句子,他们给出了如下规定:

“A”为 0.75 真↔([0.75]↔A)

而 $V([0.75]\leftrightarrow A) = 1-\mathrm{abs}(V([0.75])-V(A))$。所以,在 Grim 等人的理论中,存在无穷多的真谓词,即,每一个命题变元都有相应的真谓词。当然,这种预设仍与 Rescher 公式相融贯。故下面的讨论将继续采用 Rescher 公式,并且仅会涉及以真谓词 T(X)构造的自指语句。

二　周期与混沌——悖论语句的两种动态特征

另一个与传统解释不同的地方在于,Grim 等人将说谎者语句 L 表达为言说自身真值为假的语句:

$L\leftrightarrow(\neg\top\leftrightarrow T(‘L’))$

故 $V(L) = 1-\mathrm{abs}(0-V(L))$。显然有 $V(L) = 1/2$。

当然,这个解释实际上和传统解释——“$L\leftrightarrow\neg T(‘L’)$”相等价。此结果与模糊集合论奠基人 Zadeh 在 1979 年所给出的建议相一致,但是论证过程却更加简洁。随后,Grim 等人引入了“初值”和“迭代”的概念,对悖论语句的动态性进行了分析。从直观上来看,随着人们进行真值修正,说谎者语句的赋值呈现出在真、假二值之间的往复震荡。对于这一特征,Grim 等人给出了一个相当简洁的表述:

$$x_{n+1}=1-x_n$$

该公式与说谎者语句的赋值模式 $V(L) = 1-(1-\mathrm{abs}(1-V(L))) = 1-(V(L))$相一致,但是为了刻画其动态特征,V(L)的赋值公式被一个迭代函数 x_n 取代。在经典二值系统中,如果最初假设说谎者语句 L 为真,则 $x_0 = 1$;根据简单推理,得出 L 为假,则 $x_1 = 1-x_0 = 0$;而后,L 的真值再根据 $x_2 = 1-x_1 = 1$ 进行修正。如此往复迭代。因此,得到如图 1 所示的迭代数和真值的变换关系。

①Gary Mar, Patrick Grim. “Pattern and Chaos:New Images in the Semantics of Paradox”, *Nous*, *Vol*.25, 1991, pp. 659-695.

②Patrick Grim. “Self-Reference, Chaos, and Fuzzy Logic”, *Integration of Fuzzy Logic and Chaos Theory*. Edited by Dr. Zhong Li, Wolfgang A Halang, and Guangrong Chen, 2006, pp. 317-359.

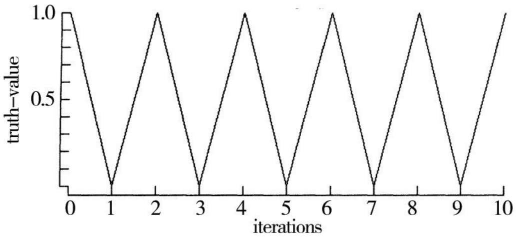

图 1　说谎者悖论赋值时序动态图(初值为 1)

在Łukasiewicz 模糊逻辑中，若对说谎者悖论赋予[0,1]之间的某个有理数真值作为初值，比如说 0.25，则会形成 0.25 和 0.75 两个值之间的震荡(见图 2)。

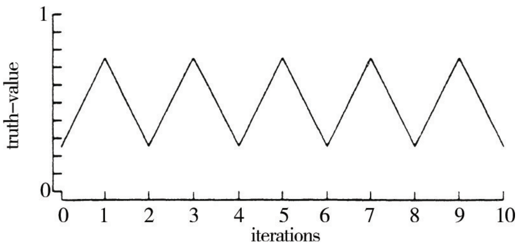

图 2　说谎者悖论赋值时序动态图(初值为 0.25)

图 3 为其相图。

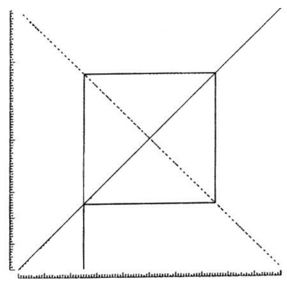

图 3　说谎者悖论赋值动态相图(初值为 0.25)

随后，Grim 提出了“混沌悖论”的概念，意指在计算机模拟研究方法中，一类动态行为较为复杂的自指语句，若给这类自指语句赋予某些不动点之外的真值，则其迭代过程可能呈现为一种混沌运动。其中最简单的例子是自指语句 L_c：

L_c：$\neg$ T(‘L_c’) $\leftrightarrow$ T(‘L_c’)

显然，根据自指语句的特征，有 $L_c \leftrightarrow$($\neg$ (T(‘L_c’)) $\leftrightarrow$ T(‘L_c’))为真，故其赋值可改写为迭代方程：$x_{n+1} = 1-\mathrm{abs}((1-x_n)-x_n)$。而如果将其初始值赋以 0.32，则其迭代数和赋值之间的关系可用图 4 来表示。

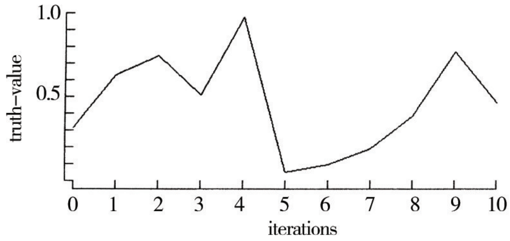

图 4　混沌悖论时序动态图(初值为 0.32)

在相对应的相图中(见图 5)，可以看到经过遍历计算，赋值迭代的动态行为。

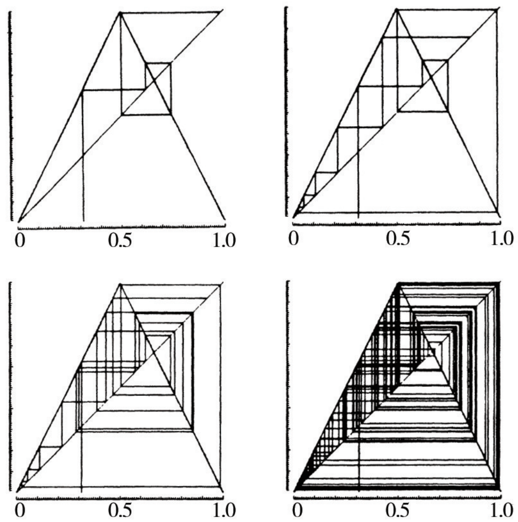

图 5　混沌悖论赋值动态相图(初值为 0.32)

通过对其他初值的分析，例如 0.314 和 0.3141，L_c 的赋值行为出现了很大的变异(如图 6 所示)，体现出了该语句对于初值的敏感性，Grim 指出，这正是混沌现象的标志性特征。

Iteration	.314	.3141			
1	.628	.6282	11	.928	.7232
2	.744	.7436	12	.144	.5536
3	.512	.5128	13	.288	.8928
4	.976	.9744	14	.576	.2144
5	.048	.0512	15	.848	.4288
6	.096	.1024	16	.304	.8576
7	.192	.2048	17	.608	.2848
8	.384	.4096	18	.784	.5696
9	.768	.8192	19	.432	.8608
10	.464	.3616	20	.864	.2784

图 6　混沌悖论赋值的初值敏感性

(初值分别为 0.314 及 0.3141)

不过，Grim 等人在之后给出的一些具有混沌特征的自指语句，其迭代方程中出现了乘方和开方等非线性运算。比如，对于 Emphatic 说谎者：“这个语句非常假”，Grim 等人直接给出了迭代方

程:$x_{n+1}=(1-x_n)^2$。这样的方程在Łukasiewicz 模糊逻辑中无法给出对应的联结词,只有在乘积逻辑中才会出现真值之间相乘的运算。故其基础理论应该是Łukasiewicz 模糊逻辑和乘积逻辑的结合①。

三　两种不可判定性——混沌函数与元胞自动机

在上述简单的混沌悖论的启发下,Grim 等人针对实运算系统给出了两个混沌的不可判定性定理。我们这里只讨论“定理 I”。假设一个实运算形式系统 T 容纳初等数论,令 f(x)为定义在实数区间[0,1]上的函数,而 Γ 为所有被判定为具有混沌行为的函数 f(x)的哥德尔编码集,定理 I 断言:在 T 中,下述混沌判定函数 C 不可定义:

$$C(‘f(x)’)=\begin{cases}1 \text{ 若 } ‘f(x)’\in\Gamma \\ 0 \text{ 若 } ‘f(x)’\notin\Gamma\end{cases}$$

其证明可简述如下:

假设 C 可定义,则对任一固定的哥德尔编码‘$f_0(x)$’,可以定义如下函数 G:

$$G(y)=\begin{cases}1-(y-y) \text{ 若 } C(‘f_0(x)’)=1;\text{否则}, \\ 1-\mathrm{abs}((1-y)-y)\end{cases}$$

以‘G(y)’代换上式中的‘$f_0(x)$’,则可定义如下函数:

$$G(y)=\begin{cases}1-(y-y) \text{ 若 } C(‘G(x)’)=1;\text{否则}, \\ 1-\mathrm{abs}((1-y)-y)\end{cases}$$

显然,如果 G(y)被判定有混沌行为,即 C(‘G(x)’)=1,则它的取值为 G(y)=1-(y-y)=1,是一个常函数。因此,其不具备混沌行为。但若 G 不具有混沌行为,则按 G 之定义,G(y)=1-(abs(1-y)-y),但其正是上文所述及的混沌悖论所对应的迭代函数,具有混沌行为,因此矛盾。

这个证明是将哥德尔自指定理推广至带有一个多余变元的结果。不过,从思路上来说,其与图灵自停机问题的不可判定定理的证明非常相似。无独有偶,在 2017 年,多位系统科学家(其中包括系统生物学的创始人 Stuart Kauffman)联名发表一篇论文,指出了通用元胞自动机的不可判定性与自指现象之间存在着重要关联②。通过对该文献关于元胞自动机不可判定性的考察,可以发现,混沌的不可判定性与元胞自动机的不可判定性证明之间亦存在着很大的相似性。

从形式上来说,元胞自动机 CA 可以被理解为一个定义在 d-维网格上的动态系统。构成网格的每一个方格(即“细胞”)c_i 的值为字母集 A_C 中的元素,即 $c_i\in A_C$。其中,索引 i 用来指示方格的几何维度,如果 CA 是一维的方格序列,那么索引 $i\in Z$,而方格的序列 $c=(\cdots c_{-2},c_{-1},c_0,c_1,c_2,\cdots)$。例如,若字母表 $A_C=\{0,1\}$,则多元组(…,1,0,0,1,1,0,1,0,…)可看作元胞自动机系统 CA 的一个状态。

元胞自动机是一个随时序进行变换的离散动态系统,在任一时刻 t,其下一时刻的状态都有一个局部规则 φ_C 来决定。φ_C 可以看作一个多元函数。如果元胞自动机系统同一个维度中有 r 个相邻方格,而方格的维度为 d,则:

$$\phi_C: A_C^{(2r+1)^d}\to A_C$$

根据局部规则,第 i 个细胞在 t 时刻的状态完全由该细胞和它相邻的细胞在上一个时刻 t-1 的状态所决定:

$$c_i^t=\varphi_C(c_{i-r}^{t-1},c_{i-r+1}^{t-1},\cdots,c_{i+r}^{t-1})$$

因此,对于整个网格 c,存在一个全域状态 $\Psi_C=A_C^{Z^d}$。而该全域状态决由全域规则 Φ_C 所决定,即:

$$\Phi_C:\Psi_C\to\Psi_C$$

故对于整个网格 c,根据全局规则,其在 t 时刻的状态完全决定于 c 在上一个时刻的状态:

$$c^t=\Phi_C(c^{t-1})$$

这样,元胞自动机 C 就可以被形式地定义为一个三元组 $C=\langle A_C,d,\varphi_C\rangle$。

在元胞自动机不可判定性定理的证明中,一个重要的前提条件是:C 必须是一个通用元胞自动机,即 C 可以对其他所有的元胞自动机进行模拟。Bruno Druand 等人通过建立与通用图灵机相等价的元胞自动机,证明了通用元胞自动机的存在性。这一前提,与混沌不可判定性定理 I 的证明中“实算数系统强到足以容纳初等算数”这一

①Gary Mar, Patrick Grim. “Pattern and Chaos:New Images in the Semantics of Paradox”, *Nous*, *Vol*.25, 1991, pp. 659-695.

②Mikhail Prokopenko, Michael harre, Joseph Lizier, Fabio Boschetti, Pavlos Pepas, Stuart Kauffman. “Self-referential basis of undecidable dynamics: from The Liar Paradox and The Halting Problem to The Edge of Chaos”. 2019, arXiv:1711.02456v2[cs.LO].

前提同等重要。

与混沌不可判定定理 I 的证明中将函数集划分为混沌可判定集和不可判定集的做法相类似，可以将元细胞自动机的全局状态 Ψ_C 划分为两个子集，Ψ_C^+ 与 Ψ_C^-，从而使 $\Psi_C^+=\Psi_C-\Psi_C^-$。对于任一不动点 $c^t\in\Psi_C^+$，可将其解释为“可接受”的输出，而 $c^t\in\Psi_C^-$ 则被理解为“不可接受”的输出。定义终止条件函数 $\pi_C:\Psi_C\times\Psi_C\times N\rightarrow\{0,1\}$，对于时刻 $t\in N$，$\pi(c^t)=1$，当且仅当 $c^t\in\Psi_C^+$ 且 $c^t=c^{t-1}$（也就是说，c^t 是一个可接收状态下的不动点）；而相应地，$\pi(c^t)=0$，当且仅当 $c^t\in\Psi_C^-$ 且 $c^t=c^{t-1}$。这样，就得到了一个包含终止条件的元胞自动机 $C=<A_C,\ d,\varphi_C,\pi_C>$。

现定义通用元胞自动机 $P=<A_P=\{0,1\},d,\varphi_P,\pi_P>$，令其可以模拟其他所有的元胞自动机 $M=<A_P,\ d,\ \varphi_M,\pi_M>$，并规定 M 的初始状态为 m^0。现令 P 的初始状态 p^0 为“M 的初始状态 m^0”的编码（由 0、1 构成特定序列或矩阵等），记作 $p^0=$ ‘M，m^0’；令 m^+ 表示 Ψ_M^+ 上的不动点，m^- 表示 Ψ_M^- 上的不动点；再令 $p^+\in\Psi_P^+$ 而 $p^-\in\Psi_P^-$，对 P 的终止函数 π_P 做如下规定：

$$\begin{cases}P:\ p^0\rightarrow p^+\text{当且仅当 }M:m^0\rightarrow m^+\\P:\ p^0\rightarrow p^-\text{当且仅当 }M:m^0\rightarrow m^-,\\\quad\text{或永不停止运行}\end{cases}$$

显然，M 演化至 m^+（或不可演化至 m^+），当且仅当 P 演化至不动点 p^+（或 p^-），藉此可实现对 M 的判定。现在构造一个 P 的“反转者”$V=<A_v,\ d,\varphi_V,\pi_V>$。它由三个自动机 V_1、V_2、V_3 串组而成，V_1 为一个“解码机”，以 M 的编码‘M’为初始状态；V_2 为“自指机”，激发 M 对自身的编码‘M’的可接受性进行判定，而在当前串组中，可令 $V_2=P$；最后，令 V_3 产生和 P 相反的演化状态，于是有：

$$\begin{cases}V:\ \text{‘M’}\rightarrow v^+\text{当且仅当‘M’}\rightarrow m^-\\V:\ \text{‘M’}\rightarrow v^-\text{当且仅当‘M’}\rightarrow m^+\end{cases}$$

因此，对于 V 自身的编码‘V’，会形成下面的判定：

$$\begin{cases}V:\ \text{‘V’}\rightarrow v^+\text{当其仅当‘V’}\rightarrow v^-\\V:\ \text{‘V’}\rightarrow v^-\text{当且仅当‘V’}\rightarrow v^+\end{cases}$$

这样，可以得出 V 到达一个位于 Ψ_V^+ 上的不动点，当且仅当 V 到达一个位于其互补集合的 Ψ_V^- 上的不动点，从而产生了盾。因此，通用元胞自动机中不存在一个终止判定者。

四　模糊逻辑悖论和元胞自动机之间关系的探讨

显而易见，在上述证明中，“自指”现象发挥了关键作用。除此之外，系统科学工作者还给出了一些更加深刻的结论。按照 Wolfram，Culik 和 Yu 等人的看法，元胞自动机可以分成四类，它们的特征可大致可归纳如下：

第一类，它们总会演化至恒定不变的状态，落入不动点；

第二类，会呈现周期性的运动状态；

第三类，会演化为混沌运动状态，其运动轨迹可判定；

第四类，会在较长的时间跨度内演化出复杂的局域结构，其运动状态没有限制，具有不可判定性。Kauffuman 等人认为，这类元胞自动机大多为通用元胞自动机，而它们较为复杂的动态特征很可能正是由不可判定性定理所保证的。

对照在Łukasiewicz 模糊逻辑的框架下自指语句的赋值行为的分类，它们与元胞自动机的分类对应关系非常明显。首先，一些简单的自指语句的动态行为，与第一类元胞自动机的动态特征相一致，比如下面的语句：

A：T(‘A’)▽T(‘A’) ▽T(‘A’)

语句 A 的赋值要么是 0，要么经过多次迭代之后，落入不动点 V(A)= 1。

其次，第二类元胞自动机，正如前文所指出的，与说谎者悖论赋值的往复震荡的动态特征相一致。再次，第三类元胞自动机的动态特征，显然与混沌悖论的赋值相似。按照 Kauffuman 等人的建议，尽管从本质上讲属于不同的范畴，但仅从技术上来说，不加限定的证明谓词 P(x)，形式语言中的真谓 T(x)，以及通用图灵机判定者 D(‘A，a’)（图灵机 D 接受‘A，a’当且仅当“图灵机 A 接受状态 a”）具有某种同构关系，若抓住其中最简单的关系来研究，即可以点带面。因此，我们可以初步提出一个假设：

如果元胞自动机中的“判定”可以是模糊的，那么“判定”本身也可以形成复杂的动态特征。

不过，第四类元胞自动机所具有的不可判定特征，尚无法在自指语句的赋值动态当中找到对应者。那么，在Łukasiewicz 模糊逻辑的框架下，有没有可能找到更加复杂的迭代机制，在带有真谓

词的自指迭代赋值的动态当中,寻找到类似第四类元胞自动机的不可判定性现象呢?也就是说,在模糊逻辑的基础上,元胞自动机有没有可能出现“高阶”的“不可判定”的情况?这是一个亟待解答的问题。因为一旦发现利用真谓词构建的“不可判定”(应时刻注意“真”与“判定”属不同范畴)的自指语句,往往意味着出现了难以解决的不一致性问题,也就是说,这类情况本质上应当归属于悖论范畴。

本世纪初,Hajek 等人巧妙地构造出了一个Łukasiewicz模糊逻辑框架下的“适度的说谎者”悖论。该悖论的构造不但需要一阶Łukasiewicz 模糊逻辑语言中包含真谓词,同时还需要将Łukasiewicz模糊逻辑系统进行扩张,使之足以容纳初等算术公理。在这个基础上,对每一个逻辑符号进行哥德尔编码,并且定义如下函数:

$n \times A = A \triangledown A \triangledown \cdots \triangledown A$(n 次重复)

于是存在下列语句:

L_1: $\neg\ \exists n(n \times T(‘(L_1)’))$

它的赋值正好是 $V(A)=1-\max(n\times(V(L_1)))$。在这样的情况下,如果 $V(L_1)=0$,则 $\max(n\times(1-V(L_1)))=1$,故 $V(L_1)=1$;而如果 $V(L_1)>0$,则有 $1-\max(n\times V(L_1)))=0$,故有 $V(L_1)=0$,从而得到矛盾。随后,Hajek 进一步证明,即便是离散的Łukasiewicz 多值逻辑,只要 MV 代数为线性序,矛盾仍然存在①。

实际上,这个悖论还可以进一步推广,形成一类“区间对角线”悖论。简便起见,可采用 Gary Mar 和 Patrick Grim 等人的规定,将具有 v 真度的语句表示为[v],同时,定义算子“-”为:$A-B=\neg(A\rightarrow B)$,即:

$$V(A-B)=\begin{cases}V(A)-V(B) & \text{当 } A>B\\ 0 & \text{当 } A\leqslant B\end{cases}$$

利用上述规定,可简单地表述悖论语句 L_2,L_3 和 L_4:

L_2: $[0.2]\triangledown([0.1]-(\exists n)(n\times(T(‘L_2’)-[0.25])))$;

L_3: $[0.1]\triangledown([0.2]-(\exists n)(n\times([0.31]-T(‘L_3’))))\triangledown([0.3]-(\exists n)(n\times(T(‘L_3’)-[0.19])))$;

L_4: $([0.1]-(\exists n)(n\times(T(‘L_4’)-[0.01])))\triangledown([0.2]-(n\times(T(‘L_4’)-[0.21])))\triangledown([0.3]-(n\times(T(‘L_4’)-[0.31])))\triangledown([0.4]-(n\times(T(‘L_4’)-[0.39])))$;

其中,L_2 的赋值呈现为在 0.2 和 0.3 之间的矛盾状态;L_3 的赋值呈现为在0.1、0.3、0.4 之间的矛盾状态;L_4 的赋值则呈现为在 0、0.4、0.7、0.9、1之间的矛盾状态。

当然,这个结果并不意味着在所有容纳初等算数的Łukasiewicz 模糊逻辑系统中,真谓词 T 完全无法被定义。至少在某些情况下,添加真谓词的系统可以具有无矛盾的模型。比如,Hajek 曾提出,如果保持算术部分服从经典逻辑,而扩张后包含真谓词(真谓语句可取[0,1]之间值),那么系统可以有一个不具备算术标准模型的一致扩张。那么,还有没有另外的路径,比如说,让真值域更“模糊”,可以去除掉矛盾,甚至为这种悖论找到一个不动点呢(就像计算机模拟方法所展现得那样)?

在一些包含无穷小量的真值域中,这个悖论赋值情况确实有所不同。比如在 Andrew Schumann 和 Florentin Smarandache 等人所建构的以 $*Q_{[0,1]}$ 为超真值域矩阵逻辑中②,L_1 不一定是矛盾的。将[0,1]之间的有理真值域 $Q_{[0,1]}$ 扩展至超有理真值域 $*Q_{[0,1]}$,需要借助一个索引集 I 和定义在索引集上的 Frechet 滤。索引集 I(可以是自然数集 N)上的 Frechet 滤 F 是一个特殊的无穷集,为 I 的所有有穷子集的补集所构成的集合。而 $*Q_{[0,1]}$ 为函数集 $Q^I_{[0,1]}$ 上由 F 所定义的等价类的集。若 $f,g\in Q^I_{[0,1]}$,则 f 与 g 等价,当且仅当$\{i|g(i)=f(i)\}\in F$,而等价类[f]就是 $*Q_{[0,1]}$ 中的超真值。对于可比较的两个超真值[f]、[g],$\max([f],[g])=[f]$,当且仅当$\{i|g(i)\leqslant f(i)\}\in F$;对于两个不可比较的超真值[f],[g],若存在[h],令$\{i|h(i)=\max(f(i),g(i))\}\in F$,则$[h]=\max([f],[g])$。

在上述规定下,以悖论 L_1 为例,$V(L_1)=1-\max(n\times V(L_1))$。令 $V(L_1)=[f]$,$f=\{a_j|j\in J\wedge J\in F\}$,随着索引数 j 趋向于无穷,若序列 a_j 不收

①Petr Hajek, Jeff Paris and John Shepherdson. “The Liar Paradox and Fuzzy Logic”, *The Journal of Symbolic Logic*,2000(1): 339-346.

②Andrew Schumann and Florentin Smarandache. *Neutrality and Many-Valued Logics*. America Researcher Press, 2007, pp. 65-69.

敛于 0，则有 $\max(n\times V(L_1))=1$，或 $\max(n\times V(L_1))$ 的取值服从幂等律，两者都会导致矛盾；若随着索引数 j 趋向于无穷，序列 a_j 收敛于 0，则对于任一自然数 n，总存在 $j\in J$ 且 $J\in F$，若 $i\geq j$，序列 $n\times a_i$ 收敛于 0。因此，若 $V(L_1)$ 为无穷小真值，则对任一 n，$n\times V(L_1)$ 仍为无穷小真值。故 $\max(n\times V(L_1))$ 不存在最大值。因此，L_1 的取值或者是矛盾的，或者在 $*Q_{[0,1]}$ 上缺乏定义。

结语

对照系统科学家对元胞自动机的研究，可以断言，计算机模拟研究方法的确为研究自指语句提供了一个非常重要的研究进路，值得逻辑学界的研究与重视。然而，从现有的研究情况来看，该理论仍然处在初步构建阶段，其理论基础尚不明确，需要严格地建立一套兼容Łukasiewicz 模糊逻辑和乘积逻辑联结词的体系。与此同时，计算机模拟研究方法对于自指语句的探索，显示出自指现象具有第一、第二、第三类元胞自动机的动态特征，进而显示出对于元胞自动机进行模糊判定可能存在的复杂性。尽管在计算机模拟研究方法对自指语句的研究结果中，尚未明确显示出类似第四类元胞自动机的动态特征，然而，考虑到模糊逻辑中的悖论与解悖方案的存在，模糊判定版本的“第四类元胞自动机”无疑具有探索的价值。因此，对两者之间的关联进一步展开深入研讨，其成果是可以期待的。

Dynamics of Self-referential Evaluation and Cellular Automata: A Comparing Research

LI Zhen-yu

(Department of Philosophy, Nanjing University, Nanjing 210023, China)

Abstract: Applying the method of computer modeling, Gary Mar and Patrick Grim showed that in fuzzy logic system self-referential sentences represent periodic and chaotic behavior, and proved that chaos itself is undecidable within the system. Cellular automata also have periodic and chaotic dynamic traits. By constructing “self-reference”, it is demonstrated that the dynamic of universal cellular automata is undecidable as well. Comparing the two disciplines will be helpful to reveal the intrinsic relations between them.

Key words: computer modeling method; self-reference; chaos; cellular automata; undecidablity

（责任校对　莫秀珍）