doi:10.13582/j.cnki.1672-7835.2019.06.005

包含选择名字的 STIT 逻辑初探

黄华新,何键枫
(浙江大学 哲学系/ 语言与认知研究中心, 浙江 杭州 310000)

摘　要:提出于 20 世纪的 STIT 理论是以分支时间、非决定论与自由选择为哲学前提的一类行动逻辑。利用 STIT 算子可以对能动句进行清晰的形式分析,从而揭示主体的能动性。尽管如此,主体的选择本身却无法在经典 STIT 理论中得到表达。通过引入新初始符号并丰富语义结构,主体在语义模型中的选择能够在形式语言中得到表示。可以证明新得逻辑具有可靠并完全的公理系统。

关键词:STIT 理论;选择;公理系统
中图分类号:B81　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-7835(2019)06-0029-08

如何在 STIT 理论的框架下讨论主体的选择?如何以一种整齐统一的方式在 STIT 理论下说出主体通过某一选择确保某一命题成立这类包含选择的能动命题?这正是本文尝试解决的。徐明通过引入形如$[a,e:stit]\varphi$的公式表达主体 a 通过行动 e 确保 φ 的成立,然而他对行动与选择的区分使得其对应的形式语义相当复杂①。另一方面,Horty 在讨论主体选择的因果关系时引入新命题变元的技术处理给予了我们启发②。考虑到 STIT 结构中对主体选择的形式处理,我们采取的策略同样是引入一类新的变元符号来指称 STIT 结构中主体的选择。类似处理在哲学逻辑的研究中屡见不鲜,混合逻辑中专名这类特殊命题变元的引入,便源于时间逻辑的研究中对语义结构内时间点的指称需求,道义逻辑中更有通过引入表示道义不理想的命题符号 V 而将道义逻辑归约为真势模态逻辑的做法。具体的细节处理将会在第一节中加以展开。

本文的结构如下:在第一节中,我们引入新得逻辑语言与形式语义,在此基础上分析包含选择的能动命题的逻辑结构,并对相关问题进行讨论。接下来,我们将重心放在新得逻辑的形式性质上。我们在第二节中给出新得逻辑的公理系统,利用典范模型方法证明该公理系统的强完全性。最后,我们在结语部分对本文的工作进行回顾,并简单讨论将来的工作。

一　形式分析

我们在本节引入新的初始符号来表示主体的选择,从而得到新得逻辑语言。对新初始符号的解释要求我们对经典 STIT 结构加以扩充。在此基础上,通过分析包含选择的能动命题的逻辑结构,我们对相关问题加以讨论。

(一)语言与语义

类似于时间逻辑通过引入专名这类新的命题变元以指称时间结构中的时刻,我们引入一类新的初始符号来描述主体的选择。将新增可数符号集合记作 CH 并预设可数命题变元集合 $PROP$ 与有穷的主体集合 AGT,我们在下面给出公式的定义。

定义 1(公式) 公式由以下 BNF 递归定义得到:

$$\varphi ::= p \mid C \mid [a]C \mid \neg\varphi \mid (\varphi\wedge\varphi) \mid [a:cstit]\varphi \mid \Box\varphi$$

其中,$p\in PROP$,$C\in CH$ 且 $a\in AGT$。其他命题联结词与对偶的模态算子如常定义,默认最外层括号可省略。

算子$\Box$ 被称作历史必然算子,$\Box\varphi$ 的读法是

收稿日期:2019-07-22
基金项目:国家社会科学基金重大资助项目(18ZDA290)
作者简介:黄华新(1959—),男,浙江慈溪人,博士,教授,主要从事语言逻辑与认知逻辑研究。

①Xu, M. "Actions as events", *Journal of philosophical logic*, 2012, 41(4):765—809.
②Horty J. F. *Agency and deontic logic*. New York: Oxford University Press, 2001.

φ 历史必然地成立。符号[a:$cstit$]是正规 STIT 算子,[a:$cstit$]φ 的读法是主体 a 通过当前选择确保命题 φ 成立。然而,在对主体能动性的刻画上,文献中的[a:$dstit$]算子要更为符合直观。[a:$dstit$]算子又被称作深思熟虑的 STIT,强调 φ 的成立并非历史必然,而是主体确保的结果。不过,我们可以将[a:$dstit$]φ 作为合取式[a:$cstit$]$\varphi \wedge \neg \Box\varphi$ 的缩写,并结合语义证明这两种 STIT 算子能够相互定义。符号 C 需要从以下两方面加以理解:一方面,它指称了某个主体的某个具体选择,正如时间逻辑中的专名作为名字指称时间结构中的时间点。另一方面,作为能判断真假的公式,它的读法是选择 C 在当前状态被相应主体执行。符号 C 无法说明其指称选择所从属的主体,而公式[a]C 的直观读法正是选择 C 是主体 a 的可行选择。注意选择名字 C 与 Horty 中引入的选择名字 A_a^K 之间的联系:作为公式的 C 与 A_a^K 同样表示其指称的选择在当前状态被执行。然而,命题变元 A_a^K 的上标 K 涉及具体 STIT 结构中主体的某个选择,并未实现形式语言与语义模型的分离。此外,尽管命题变元 A_a^K 强调了其指称的选择是某个主体 a 的选择,但我们将选择与主体分离开来:我们未必知道当前状况是否为某个选择 C 被执行后的结果,却可能知道选择 C 是某个主体的可行选择。最后,我们将在语义上允许不同选择名字指称主体的同一选择,我们将同一个选择拥有不同的选择名字理解为这些名字是对同一个选择基于不同角度的描述。需要注意这与行动类型(action types)的差异:本文的选择名字针对的是语义结构中具体的选择(action tokens)而非广义的行动类型①。综上所述,尽管命题变元 A_a^K 在形式上更为紧凑,我们相信本文的形式处理要更为清楚。

我们引入新的初始符号指称主体的选择,主体的选择本身又是什么? 本文沿用 STIT 理论的形式处理。STIT 理论在分支时间理论的基础上添加表达主体选择结构的 $Choice$ 函数,从而得到相应的 STIT 框架。其中,分支时间理论以类树结构表示非决定的世界:向前可分支表示将来未定,向后不分支表示过去唯一②。历史是类树结构中的极大链,直观意义为世界的一种可能的完整演变进程。

定义 2(分支时间)一个分支时间结构 $BT=(W,<)$是满足下面条件的二元组:

· W 为非空的时刻集,<是 W 上严格偏序,表示时刻的先后关系;

· < 满足树状性:如果$w_1<w_3$且 $w_2<w_3$成立,那么$w_1<w_2$或$w_2<w_1$或$w_1=w_2$成立;

· < 满足历史关联性:对于任意 w_1与w_2存在w_0满足$w_0<w_1$且 $w_0<w_2$成立。

给定分支时间结构 $BT=(W,<)$,历史的数学定义为 W 关于严格偏序< 的极大链。其中,$w\in h$ 表示世界在历史 h 中曾演变为时刻 w,严格偏序<根据实际需求可能满足额外性质,如稠密性与连续性等。将所有历史的集合记作 $Hist$ 并用H_w表示所有穿过时刻 w 的历史集合。给定历史h_1,$h_2\in H_w$,如果存在 $v>w$ 满足 $v\in h_1\cap h_2$,则称h_1与 h_2 在时刻 w 中未分离。给定历史 h 与状态 w,如果 $w\in h$,则序对(w,h) 被称为索引。

STIT 框架的 $Choice$ 函数规定了主体在世界中能够采取的选择。从形式上看,给定某一时刻 w 与某一主体 a,$Choice_a^w$是H_w的划分,主体 a 在时刻 w 上的可行选择正是该划分中对应的等价类。这种处理的基本思路是:当世界演变至时刻 w 时,主体 a 的选择 C 将会使某些可能的演变进程不再可能,主体 a 在时刻 w 采取选择 C 的效果是世界之后的演变进程将局限为 C 中的历史。STIT 理论正是将选择带来的结果等同于选择本身。此外,$Choice$ 函数还需满足两个要求。第一个是未分支历史的不可区分性,即如果h_1与h_2在 w 上未分离,h_1与h_2属于$Choice_a^w$中同一个等价类。第二个是主体的相互独立性,即对于所有时刻 w、所有主体 a 与对应选择 $choice_a^w$,均有 $\cap_{a\in AGT} choice_a^w$并非空集。这里的独立在直观上意味着主体的任何选择不会受到其他主体的选择影响,在技术上是指任给一个所有主体的选择组合(choice profile)总会有历史 h 被包含在其中。③这一要求使得 STIT 理论能够非常直接地将个体 STIT 算子推广为群体 STIT 算子④。

新符号的引入意味着 STIT 理论的语义模型

①Horty J. F. and Pacuit E,“Action types in stit semantics”, *The Review of Symbolic Logic*, 2017, 10(4):613-657.

②Prior A. N. *Past, present and future*. Oxford: Clarendon Press, 1967. 与 Thomason R. H.“Indeterminist time and truth - value gaps”. *Theoria*, 1970, 36(3): 264-281. 与 Thomason R. H. Combinations of tense and modality, in *Handbook of philosophical logic*. Dordrecht : Springer, 1984: 135-165.

③因为 STIT 逻辑的这一特点,文献中往往将 STIT 结构中的某一时刻表示为类似标准式博弈(normal form game)的形式。

④Horty J. F. *Agency and deontic logic*. New York: Oxford University Press, 2001.

需要进行相应的扩充。给定一个 STIT 框架,我们引入一个定义域为 CH 的名字函数 $Name$,直观意义是对每个选择进行命名。$Name(C)$ 是一个三元组,其中,第一分量 $Name_1(C)$是某个主体 a,第二分量 $Name_2(C)$是某个时刻 w,第三分量 $Name_3(C)$则是$Choice_a^w$中某个等价类,其中主体 a 与时刻 w 分别为 $Name_1(C)$与 $Name_2(C)$的指称。直观上说,$Name_1(C)$ 规定了可以选择 C 的主体,$Name_2(C)$规定了可以选择 C 的时刻,$Name_3(C)$ 给出了选择 C 的内容。

定义 3(模型)一个模型 $M=(W,<,Choice,Name,V)$ 是满足下面条件的五元组:

· $(W,<,Choice)$ 是 STIT 框架;

· $Name$ 是命名函数;

· $V:PROP\to 2^{W\times Hist}$是赋值函数。

给定形式语言以及对应的语义模型,我们便能够以递归的方式定义公式在模型上的真假:

定义 4(满足)给定一个模型 $M=(W,<,Choice,Name,V)$ 与索引(w,h),我们称(w,h) 满足 φ 当且仅当:

· $M,(w,h)\vDash p$ 当且仅当 $(w,h)\in V(p)$;

· $M,(w,h)\vDash C$ 当且仅当 $Name_2(C)=w$ 且 $h\in Name_3(C)$;

· $M,(w,h)\vDash [a]C$ 当且仅当 $Name_1(C)=a$;

· $M,(w,h)\vDash \neg\varphi$ 当且仅当 $M,(w,h)\nvDash\varphi$;

· $M,(w,h)\vDash \varphi\wedge\psi$ 当且仅当 $M,(w,h)\vDash\varphi$ 且 $M,(w,h)\vDash\psi$;

· $M,(w,h)\vDash [a:cstit]\varphi$ 当且仅当任意$h^*\in Choice_a^w(h)$ 均有 $M,(w,h^*)\vDash\varphi$;

· $M,(w,h)\vDash \Box\varphi$ 当且仅当任意$h^*\in H_w$均有 $M,(w,h^*)\vDash\varphi$。

公式的有效性、可满足性的定义如常。用$\vDash\varphi$表示公式 φ 在所有模型的点模型上为真(即公式 φ 是有效的)。特别地,关于选择名字我们有以下公式有效。

命题 5 下列公式是有效的。

1) $C\to\bigvee_{a\in AGT}[a:cstit]C$;

2) $\Diamond([a:cstit]\varphi\wedge C\wedge[a]C)\to\Box(C\to\varphi)$;

3) $(C\wedge[a]C)\to[a:cstit]C$;

4) $[a]C\to\neg[b]C$,其中 $a\neq b$ 成立;

5) $\bigvee_{a\in AGT}[a]C$;

6) $[a]C\to\Box[a]C$;

7) $\neg[a]C\to\Box\neg[a]C$;

8) $([a:cstit]C\wedge\neg[a]C)\to\Box C$.

证明:我们只验证前面两个公式。假设存在点模型满足 $M,(w,h)\vDash C$,根据语义可知 $Name_3(C)$ 是某个主体 a 的等价类,其中主体 a 是 $Name_2(C)$。故 $M,(w,h)\vDash[a:cstit]C$ 从而有析取式 $\bigvee_{a\in AGT}[a:cstit]C$ 同样被满足。因此 $M,(w,h)\vDash C\to\bigvee_{a\in AGT}[a:cstit]C$ 成立。现在验证第二个公式。假设存在点模型满足 $M,(w,h)\vDash\Diamond([a:cstit]\varphi\wedge C\wedge[a]C)$。因此在该点模型上有 $Name_1(C)$ 是 w 成立。令 $h'\in H_w$满足 $M,(w,h')\vDash[a:cstit]\varphi\wedge C\wedge[a]C$ 并因为 $M,(w,h')\vDash C\wedge[a]C$ 可知 $Name_3(C)$ 正是等价类$Choice_a^w(h')$。由 $M,(w,h')\vDash[a:cstit]\varphi$ 可知公式 φ 在等价类 $Name_3(C)$ 中每个序对上成立且每个序对上均有 C 成立。因此,对于任意$h''\in H_w$只要 $M,(w,h'')\vDash C$ 则必有 $M,(w,h'')\vDash\varphi$ 成立。因此 $M,(w,h)\vDash\Box(C\to\varphi)$ 同样成立。由此证得 $M,(w,h)\vDash\Diamond([a:cstit]\varphi\wedge C\wedge[a]C)\to\Box(C\to\varphi)$成立。

(二)分析与讨论

经典 STIT 理论将主体的选择处理为语义结构中的等价类,因此无法像其他基于动态逻辑的行动逻辑那样直接在形式语言内讨论主体的选择。折中的处理似乎是将公式$[a:dstit]\varphi$ 读作:主体 a 实施了 φ-选择。但是,正如 Broerson 中指出的那样,主体的某个选择可能会引起各种意想不到的副作用(side effects)①,尽管直接将选择造就的结果等同于选择本身是 STIT 理论形式处理的内核,直观上,我们还是希望将选择与选择所带来的结果加以区分。选择名字的引入较好地达到了一种平衡:作为名字,它直接指称了选择本身;作为命题,它表示了这一选择的被执行。形式构造$[a]C$ 则能强调选择与主体之间的关联。

现在回到对包含选择的能动命题的形式刻画。给定形如主体 a 选择 C 确保命题 φ 成立的包含选择的能动命题,我们能推出以下三个命题:(一)当前世界是选择 C 被执行后的结果。(二)选择 C 是主体 a 的可行选择。(三)主体 a 的当前选择确保了命题 φ 的成立。结合 STIT 模型考虑,上面包含选择的能动命题意味着当前世界演进到时刻 $Name_2(C)$ 且 $Name_1(C)$是主体 a,此外命题 φ 在任意 $h\in Name_3(C)$构成的索引$(Name_2(C),h)$中均成立。换言之,一个包含选择的能动命题在逻辑上蕴涵了上述三个相关命题的合取。相反地,给定上述三个命题,是否蕴涵对应的包含选择的能动命题?答案是肯定的:首先,已知选择

①Broerson. J. "Deontic epistemic stit logic distinguishing modes of mens rea", *Journal of Applied Logic*, 2011, 9(2):137-152.

C 属于主体 a 的可行选择,选择 C 的执行与否由作为潜在执行者的主体 a 决定。其次,由于当前世界是选择 C 被执行后的结果,我们便能推断出主体 a 确实执行了选择 C。最后,已知主体 a 的当前选择确保了命题 φ 的成立,通过代入便能得到主体 a 当前选择 C 确保了命题 φ 的成立。借助上面的分析,我们得知一个包含选择的能动命题在逻辑上等值于三个相关命题的合取。

考虑公式$[a:dstit]C$,它的读法是主体 a 的当前选择真切地确保了选择 C 被选择。根据形式语义验证,可以得知当 $|Choice_a^w|>1$ 时公式 $[a:dstit]C$ 与公式 $C\wedge[a]C$ 逻辑等值:由于$[a:dstit]$算子满足 T 公理,从公式 $[a:dstit]C$ 为真可以得到公式 C 为真。如果 $Name_2(C)$ 并非主体 a 而是其他主体,则由公式 $[a:dstit]C$ 成立可知该主体 b 的选择不少于 2 个,否则公式 C 将会历史必然地真。取主体 b 的选择中并非 $Name_3(C)$ 的选择并考虑它与主体 a 当前选择的交集。主体的相互独立性保证了该交集并非空集,而交集中的元素明显是不满足公式 C 的,这与公式$[a:dstit]C$ 为真矛盾。另一方面,假设公式 $C\wedge[a]C$ 为真,由于$|Choice_a^w|>1$ 使得公式 C 并非历史必然地真,从而满足了负条件。容易验证公式 $[a:cstit]C$ 为真。

因此,如果不考虑主体的意向与目的,公式$[a:dstit](C\wedge\varphi)$确实在逻辑等值的意义上能够表示包含选择的能动命题。但这一处理难以推广至其他类型的 STIT 算子。如 XSTIT 算子基于离散的分支时间结构讨论主体的选择在下一时刻的效应,此时公式$[a:xstit](C\wedge\varphi)$ 表达的意思便明显有别于 $C\wedge[a]C\wedge[a:xstit]\varphi$ 这一合取式①。另一方面,我们希望用 STIT 理论讨论哲学上更精细的行动问题,目的与意图在其中是不可忽略的。IIT 算子便是讨论主体意向地做某事的一类 STIT 算子②。其中,公式 $[a:iit](C\wedge\varphi)$ 与 $C\wedge[a]C\wedge[a:iit]\varphi$ 既非逻辑等值,前者表达的内容亦显然强于对应的包含选择的能动命题:它蕴涵着主体执行某一选择正是采取该选择的目的之一这样的哲学承诺。另一方面,如果接受我们上文对包含选择的能动命题的逻辑分析,承认这样的命题等同于对应的三个相关命题的合取,我们便仍然能将包含选择的能动命题符号处理为形如 $C\wedge[a]C\wedge[a:stit]\varphi$ 的公式。在这里,公式 $C\wedge[a]C\wedge[a:stit]\varphi$ 仅仅表示主体 a 的当前选择是 C,除此之外便再无更多的哲学蕴涵。

基于动态逻辑的行动逻辑将主体的行动类比为计算机程序,正如简单程序能通过不同方式的结合得到复杂程序,复杂选择同样能由简单选择构成。我们在下面说明,引入选择名字后的 STIT 理论同样能在一定程度上讨论某一主体的复杂选择。特别地,我们称 STIT 模型中为每个主体规定的选择为简单选择。

简单选择的并:考虑以下猜骰子大小的情景,主体 a 在当前时刻有 7 种可行的简单选择,即不参与和分别押注 1 到 6 点,额外规定如果押注偶数点,则不论是否押中均不赔钱。如何借助之前的分析表示主体当前通过选择押注偶数点确保不赔钱这个命题?选择押注偶数点自身并非简单选择,我们无法直接通过选择的名字来加以指称。然而,我们可以将选择押注偶数点视做选择押注 2 点、押注 4 点与押注 6 点的并选择。因此,命题主体当前通过押注偶数点确保不赔钱依然能被分析为三个命题的合取:(一)当前世界是并选择押注偶数点被选择的结果,对应于公式$C_2\vee C_4\vee C_6$,其中C_i是选择押注 i 点的名字。(二)并选择押注偶数点是主体 a 的选择,蕴涵构成并选择的每个简单选择均为主体 a 的选择,对应于公式$[a]C_2\wedge[a]C_4\wedge[a]C_6$。(三)主体 a 的当前选择确保了主体不赔钱,对应于公式 $[a:dstit]a$ 不赔钱。

简单选择的交:由于 STIT 理论预设同一主体在某一时刻仅采取一种选择,简单选择的交只可能是指不同主体的同时选择这一类选择。继续分析上面例子并将主体 a 的选择简化为不参与、押注偶数点与押注奇数点,引入主体 b 表示庄家,主体 b 可以采取两种选择,分别为实施优惠与不实施优惠。主体 a 押注偶数点且主体 b 实行优惠这一同时选择确保了主体 a 不会赔钱。遵循群体 STIT 理论的传统,我们认为这一交选择的执行者是主体 a 与主体 b 构成的群体。因此,涉及简单交选择的能动命题便可分析为三个命题的合取:(一)当前世界是交选择押注偶数点且实施优惠被选择的结果,对应于公式$C_{偶数}\wedge C_{优惠}$。(二)交选择押注偶数点且实施优惠是群体$\{a,b\}$的选择,这意味着构成交选择的每个简单选择恰好对应于群体里某主体,是该主体的选择,形式化为公

①Broerson. J. "Deontic epistemic stit logic distinguishing modes of mens rea", *Journal of Applied Logic*, 2011, 9(2):137-152.

②Bentzen M. *Stii, iit, and Deontic Logic for Action Types*. Section for Philosophy and Science Studies, Roskilde University, 2010.

式$[a]C_{偶数}\wedge[b]C_{优惠}$。(三)群体$\{a,b\}$的当前选择确保了不赔钱,对应于公式$[a,b:dstit]a$ 不赔钱。不难发现,当讨论简单选择的交时,我们不可避免地要使用到群体 STIT 算子。

简单选择的否定:不采取某一选择本身能否被视作一种选择,即是否存在否定性选择这个问题在哲学讨论上尚存争议,形如主体 a 通过不选择选择 C 真切地确保 φ 成立这种带否定的能动命题却毫无疑问地存在。如何处理这类带否定的能动命题需要一番分析。不难发现,主体 a 与选择 C 之间处于何种关系是形式化的难点。参考上文对包含选择的能动命题,我们知道命题主体 a 通过不选择选择 C 真切地确保 φ 成立蕴涵着:(一)当前世界是选择 C 未被执行的结果。(二)主体 a 真切地确保了 φ 成立。问题在于选择 C 能否被主体 a 选择? 如果答案是否定的,似乎没有理由认为主体 a 能摒弃选择 C:命题亚历山大通过不选择发动战争真切地确保和平在直观上意味着亚历山大本可发动战争。因此,带否定的能动命题合理的形式处理应该是公式$\neg C\wedge[a]C\wedge[a:dstit]\varphi$ 而非公式$\neg C\wedge[a:dstit]\varphi$,后者并没有表达出选择 C 与主体 a 的关系。

尽管基于动态逻辑的行动逻辑还能讨论选择的合成(将先执行甲选择再执行乙选择视作一个复杂选择)与选择的自反传递闭包(将任意地有穷次数地执行某一选择视作一个复杂选择),我们却并不考虑这两类复杂选择。这是因为 STIT 理论预设了主体在某一时刻只能执行一种选择,合成选择却无法判断其执行的时刻点。此外,主体的选择是针对某一时刻而言的,而在某一时刻只能执行一次选择。因此,除非我们将选择理解为广义的行动类型,否则在 STIT 理论下讨论任意地有穷次数地执行某一选择 C 便是没有意义的。这并不令我们感到意外,因为 STIT 理论本来就不是动态逻辑风格的行动逻辑①。

最后,我们简单讨论一下引入新初始符号集 CH 来表示选择名字的技术意义。事实上,我们的处理在数学层面上相当于引入所谓的类专名,每个符号 C 分别指称了 STIT 框架中的一个特殊的索引类。如混合逻辑中专名的引入增强了语言的表达力,对语言的扩充增强了我们刻画 STIT 框架的能力。尽管本文的重心放在了对包含选择的能动命题的形式刻画上,类专名 C 的引入使得我们在理论上可以考虑更特殊的 STIT 框架。我们可以进一步丰富 STIT 框架的结构,例如引入主体对不同选择的偏好来讨论主体喜欢做出哪种选择。类专名 C 使我们能直接讨论 STIT 框架中主体的选择,相应的技术结果如可靠完全的公理系统也应该能更容易地得到。更重要的是,由于类专名的数学身份是一类特定的命题变元,我们有理由期待引入类专名在丰富了逻辑表达力的同时,依然保持着逻辑的可判定性。

二　形式结果

我们在本节为新得逻辑提供一个希尔伯特式公理系统,其中含有一条非标准规则 RA。目前尚不清楚规则 RA 能否被其他标准规则或公理取代。验证过系统的可靠性后,我们使用典范模型方法证明所得系统的完全性,所用技巧基本参照徐明对多主体 DSTIT 逻辑完全性的证明,基本思路为将所得典范模型转换为一个 STIT 模型②。

称公式集 Φ 是名字不矛盾的,当且仅当:(一)Φ 中公式仅有以下三种,即 $[a]C$,$\neg[a]C$ 与 $\neg\Diamond C$,其中 $a\in AGT$ 且 $C\in CH$。(二)如果 $[a]C\in\Phi$ 且 $a\neq b$ 成立,则 $[b]C\notin\Phi$ 成立。(三)$\{\neg[a]C:a\in AGT\}\subseteq\Phi$ 对任意 $C\in CH$ 均不成立。

定义 6(公理系统)以下公理模式与规则构成希尔伯特式公理系统:

A1　所有命题重言式

A2　$\Box$ 的 $S5$ 公理

A3　$[a:cstit]$的 $S5$ 公理

A4　$\bigwedge_{1\leqslant n\leqslant k}\Diamond[a:cstit]\varphi_n\to\Diamond\bigwedge_{1\leqslant n\leqslant k}[a:cstit]\varphi_n$

A5　$\Box\varphi\to[a:cstit]\varphi$

A6　$[a]C\to\neg[b]C$ 其中 $a\neq b$ 成立

A7　$\Diamond([a:cstit]\varphi\wedge C\wedge[a]C)\to\Box(C\to\varphi)$

A8　$(C\wedge[a]C)\to[a:cstit]C$

A9　$[a]C\to\Box[a]C$

A10　$\neg[a]C\to\Box\neg[a]C$

①当然,这并不意味 STIT 理论与动态逻辑彻底地泾渭分明:Herzig 与 Lorini 证明了满足特定模型条件的 STIT 逻辑(主体的选择是有穷的)可以嵌入到他们提出的动态行动逻辑当中。具体请参看:Herzig A. and Lorini E. "A dynamic logic of agency I: STIT, capabilities and powers", *Journal of Logic, Language and Information*, 2010, 19(1):89. 与 Lorini E. "A dynamic logic of agency II: Deterministic DLA, Coaltion Logic, and Game Theory". *Journal of Logic, Language and Information*, 2010, 19(3):327-351.

②Xu. M. Decidability of deliberative stit theories with multiple agents, in *Temporal Logic*, Berlin, Heidelberg: Springer, 1994: 332-348.

A11　$\bigvee_{a\in AGT}[a]C$

MP　由 $\varphi\to\psi$ 与 φ 推出 ψ

NEC　由 φ 推出 $\Box\varphi$

RA　由 $\bigwedge\Phi\wedge C\to\varphi$ 推出 φ,Φ 是名字不矛盾的,$\neg\Diamond C\notin\Phi$ 且 Φ 中名字与 C 均未出现在 φ 中。

称公式集 Φ 推出公式 φ(记作:$\Phi\vdash\varphi$)当且仅当存在有穷子集 $\Psi\subseteq\Phi$ 使得 $\bigwedge\Psi\to\varphi$ 是定理(公式 ψ 是定理记作:$\vdash\psi$)。称公式集 Φ 是一致的当且仅当并非 Φ 推出矛盾。

命题7 上面的公理系统是可靠的。

证明:我们只验证规则 RA 的可靠性。否则,存在点模型 $(W,<,Choice),Name,V,(w,h)\nvDash\varphi$ 成立,其中 $(W,<,Choice)$ 是STIT框架。只需要证明存在点模型 $M^*,(w^*,h^*)\vDash\bigwedge\Phi\wedge C\wedge\neg\varphi$ 即满足要求。不妨考虑STIT框架 $(W,<,Choice)$ 与索引 (w,h) 并根据 Φ 中公式定义新的 $Name$ 函数。注意到公式集 Φ 中公式只有 $[a]D$、与 $\neg[a]D$ 与 $\neg\Diamond D$ 三种且这些名字并未出现在 φ 中,重新定义关于这些名字的 $Name$ 函数并不会影响公式 φ 的真假。如果 w 在 W 中的 $<$-前驱有无穷多个,由于 Φ 是名字不矛盾的且 $\neg\Diamond C\notin\Phi$,总是可以定义新的 $Name$ 函数;如果 w 在 W 中的 $<$-前驱有穷,令 v 为树的根且 n 为 Φ 中出现名字的个数,引入新点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 至 W 并扩充偏序以 $v_1,v_2,\cdots,v_n<w$ 并在这些新的时刻上定义平凡的 $Choice$ 函数,在新得结构中容易定义满足条件的 $Name$ 函数。由于 Φ 中名字与 C 未在 φ 中出现,φ 亦在新得点模型中满足。

我们现在证明公理系统的完全性,这等价于证明一致公式集的可满足性。因此,给定一致公式集 Φ,我们需要证明存在点模型 $M,(w,h)\vDash\Phi$ 成立。我们使用典范模型方法,直接用极大一致集构造模型。下文直接使用极大一致集的相关性质①。将所有极大一致集的类记作 W^c,并在 W^c 上定义 $R_\Box$-关系满足:任意 $w_1,w_2\in W^c$ 均有 $R_\Box w_1w_2$ 成立当且仅当 $\{\varphi:\Box\varphi\in w_1\}\subseteq w_2$ 成立。验证可知 $R_\Box$ 是等价关系,故 $R_\Box$ 将 W^c 划分为互不相交的 $R_\Box$-等价类。称一个由 $R_\Box$-等价类构成的集合 X 为合适的,当且仅当对于任意 $C\in CH$ 均存在唯一的 $R_\Box$-等价类 E 满足 $\Diamond C$ 属于 E 中所有极大一致集。称名字 C 出现在 $R_\Box$-等价类集合 X,当且仅当存在 $E\in X$ 使得任意 $\Gamma\in E$ 满足 $\Diamond C\in\Gamma$ 成立。

命题8 存在合适的由 $R_\Box$-等价类构成的集合。

证明:对名字集 CH 进行排序,并递归定义上升序列 $X_0,X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 如下:任取极大一致集 Γ,将 Γ 所在 $R_\Box$-等价类记作 E 并将 X_0 定义为 $\{E\}$。假设 X_n 已完成定义并将所有出现在 X_n 中的名字构成的集合记作 $CH(n)$。令 C 为排序中第一个未出现在 $CH(n)$ 的名字。若不存在这样的 C 则定义 X_{n+1} 为 X_n。否则,将集合 $\{[a]C:[a]C\in\Gamma\}\cup\{\neg[a]C:\neg[a]C\in\Gamma\}\cup\{\neg\Diamond D:D\in CH(n)\}$ 记作 Σ,我们需要证明 $\Sigma\cup\{C\}$ 的一致性。否则,存在有穷子集 $\Sigma^*\subseteq\Sigma$ 满足 $(\bigwedge\Sigma^*\wedge C)\to(p\wedge\neg p)$ 是定理。注意到 Σ^* 是名字不矛盾的且 $\neg\Diamond C\notin\Sigma$,根据规则 RA 可得 $p\wedge\neg p$ 是定理,矛盾。因此 $\Sigma\cup\{C\}$ 是一致的,将其扩充为极大一致集 Σ^* 并记所在 $R_\Box$-等价类为 E^*,将 X_{n+1} 定义为 $X_n\cup\{E^*\}$。

定义 $X=\cup_{n\in\omega}X_n$。显然 X 是由 $R_\Box$-等价类构成的集合。对于任意 $C\in CH$,令 i 为名字 C 在上面证明中的排序。因此,当 $i>n$ 时显然存在 $R_\Box$-等价类 E 满足 $\Diamond C$ 属于 E 中所有极大一致集。假设等价类 E 并不唯一,则按照先后顺序至少存在 E_1,E_2 分别增加到构造中。注意 E_2 对应于某个极大一致集 Σ,但此时我们有 $\neg\Diamond C\in\Sigma$ 成立。故假设不成立。X 确实是一个合适的由 $R_\Box$-等价类构成的集合,定义是成功的。

给定 $R_\Box$-等价类 E,在上面定义 $R_{a,E}$-关系如下:对于任意 $\Phi,\Psi\in E$,$\Phi\ R_{a,E}\ \Psi$ 成立当且仅当 $\{\psi:[a:cstit]\psi\in\Psi\}\subseteq\Phi$ 成立。验证可知 $R_{a,E}$-关系是等价关系。

定义9(典范框架)给定极大一致集 Σ,由 Σ 生成的典范框架是满足以下条件的二元组 (X,R):

· X 如上面命题中定义,其中 Σ 对应于 X_0 定义中的 Γ;

· 对于任意 $a\in AGT$ 与 $x\in X$,$R_{a,x}$ 是 x 上对应等价关系。

用 $E_{a,x}$ 表示所有 $R_{a,x}$-等价类构成的集合。

引理10(存在引理)给定极大一致集 Γ 与由其生成的典范框架 (X,R),我们有以下结果:

1.对于任意 $x\in X,\Phi\in x$ 与任意 φ,$\Box\varphi\in\Phi$ 当且仅当任意 $\Phi^*\in x$ 均有 $\varphi\in\Phi^*$ 当且仅当任意 $\Phi^*\in x$ 均有 $\Box\varphi\in\Phi^*$;

2.对于任意 $x\in X,\Phi\in x,a\in AGT$ 与任意 φ,$[a:cstit]\varphi\in\Phi$ 当且仅当任意 $\Phi^*\in x$ 满足 $\Phi\ R_{a,x}\ \Phi^*$ 均有 $\varphi\in\Phi^*$ 当且仅当任意 $\Phi^*\in x$ 满足 $\Phi\ R_{a,x}$

①Blackburn P. and De Rijke M. and Venema Y. *Modal logic*. volume 53, New York: Cambridge University Press, 2002.

Φ^* 均有 $[a:cstit]\varphi\in\Phi^*$。

证明:对于第一项,我们只证明第一个等值式,且易知(⇒)方向显然成立。假设对于任意 $\Phi^*\in x$ 均有 $\varphi\in\Phi^*$ 且 $\Box\varphi\notin\Phi$。将集合 $\{\neg\varphi\}\cup\{\psi:\Box\psi\in\Phi\}$ 记作 Ψ,容易证明 Ψ 的一致性。令 Ψ^+ 为扩充了 Ψ 的极大一致集。由 $\Phi R_\Box\Psi^+$ 可知 $\Psi^+\in x$。这与任意 $\Phi^*\in x$ 均有 $\varphi\in\Phi^*$ 矛盾。

对于第二项,我们只证明第一个等值式,且易知(⇒)方向显然成立。假设对于任意 $\Phi^*\in x$ 满足 $\Phi R_{a,x}\Phi^*$ 均有 $\varphi\in\Phi^*$ 且 $[a:cstit]\varphi\notin\Phi$。将集合 $\{\neg\varphi\}\cup\{\psi:\Box\psi\in\Phi\}\cup\{\theta:[a:cstit]\theta\in\Phi\}$ 记作 Σ,我们需要证明 Σ 的一致性。否则,存在 $\psi_1,\cdots,\psi_m$ 与 $\theta_1,\cdots,\theta_n$ 满足 $(\wedge_{1\leqslant i\leqslant m}\psi_i\wedge\wedge_{1\leqslant j\leqslant n}\theta_j)\to\varphi$ 是定理。可推得 $(\wedge_{1\leqslant i\leqslant m}[a:cstit]\psi_i\wedge\wedge_{1\leqslant j\leqslant n}[a:cstit]\theta_j)\to[a:cstit]\varphi$ 是定理。另一方面,注意到 $\Box p\to[a:cstit]p$ 是定理且公式 $\wedge_{1\leqslant i\leqslant m}\Box\psi_i\in\Phi$ 成立,故公式 $\wedge_{1\leqslant i\leqslant m}[a:cstit]\psi_i\wedge\wedge_{1\leqslant j\leqslant n}[a:cstit]\theta_j\in\Phi$ 成立。此时有 $[a:cstit]\varphi\in\Phi$,这与 Φ 的一致性相悖。将 Σ 扩充为极大一致集 Σ^+。由于 $\{\psi:\Box\psi\in\Phi\}\cup\{\theta:[a:cstit]\theta\in\Phi\}\subseteq\Sigma^+$,我们有 $\Sigma^+\in x$ 且 $\Phi R_{a,x}\Sigma^+$。这与任意 $\Phi^*\in x$ 满足 $\Phi R_{a,x}\Phi^*$ 均有 $\varphi\in\Phi^*$ 矛盾。

引理 11 给定极大一致集 Γ 与由其生成的典范框架 (X,R),令 $x\in X$ 且 f 是定义域为 AGT 的函数满足 $f(a)\in E_{a,x}$ 对任意 $a\in AGT$ 成立。我们有 $\cap_{a\in AGT}f(a)\neq\emptyset$ 成立。

证明:令 $x\in X$ 且 f 是定义域为 AGT 的函数满足 $f(a)\in E_{a,x}$ 对任意 $a\in AGT$ 成立。存在公式序列 $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots$ 满足对任意 $w\in W^c$,均有 $w\in x$ 当且仅当 $\Lambda_\Box=\{\Box\varphi_j:j\geqslant 0\}\subseteq w$ 成立。对于任意 $a\in AGT$,存在公式序列 $\psi_{a,0},\psi_{a,1},\psi_{a,2},\cdots$ 满足对任意 $w\in x$,$w\in f(a)$ 当且仅当 $\Lambda_a=\{[a:cstit]\psi_{a,j}:j\geqslant 0\}\subseteq w$ 成立。

我们首先证明 $\Theta=\Lambda_\Box\cup\cup_{a\in AGT}\Lambda_a$ 是一致的。只需证明对任意 $\Box\varphi\in\Lambda_\Box$ 与任意有穷子集 $AGT^*\subseteq AGT$ 的 $[a:cstit]\psi_a\in\Lambda_a$,公式 $\Box\varphi\wedge\wedge_{a\in AGT^*}[a:cstit]\psi_a$ 是一致的。不难发现对于任意 $a\in AGT^*$,存在 $w_a\in f(a)\in E_{a,x}$ 满足 $[a:cstit]\psi_a\in w_a$。选取任意 $w\in x$,均有 $\Box\varphi\wedge\wedge_{a\in AGT^*}\Diamond[a:cstit]\psi_a\in w$ 成立。

因此,我们有 $\Box\varphi\wedge\Diamond\wedge_{a\in AGT^*}[a:cstit]\psi_a\in w$,进而得到 $\Diamond(\varphi\wedge\wedge_{a\in AGT^*}[a:cstit]\psi_a)\in w$。由上可得公式 $\varphi\wedge\wedge_{a\in AGT^*}[a:cstit]\psi_a$ 的一致性,故 Θ 能被扩充为极大一致集 Θ^+。注意到 $\Theta^+\in x$ 且对任意 $a\in AGT$ 有 $\Theta^+\in f(a)$。我们得到 $\cap_{a\in AGT}f(a)\neq\emptyset$ 成立。

引理 12 给定极大一致集 Γ 与由其生成的典范框架 (X,R),(X,R) 能被转换为一个 STIT 结构。

证明:我们定义 $S=(T,<,Choice)$ 如下:

- $T=\cup X\cup X\cup\{X\}$;
- $\{(x,w):w\in x,x\in X\}\cup\{(X,x):x\in X\}\cup\{(X,w):w\in\cup X\}$;

对于任意 $x\in X$ 与 $w\in x$,我们令 $h_w=\{X,x,w\}$ 表示 h_w 并注意到 h_w 是 $(T,<)$ 中唯一经过 w 的历史。不难发现任意 $w\in\cup X$ 与 h_w 之间存在一一对应。最后,我们定义 $Choice$ 函数为:

- $Choice(a,X)=\{\{h_w:w\in\cup X\}\}$;
- 对任意 $a\in AGT$ 与 $x\in X$,$Choice(a,x)=\{H:\exists e(e\in E_{a,x}\wedge H=\{\{h_w:w\in e\}\})\}$;
- 对任意 $a\in AGT$ 与 $w\in\cup X$,$Choice(a,w)=\{\{h_w\}\}$。

现在验证 S 确实是 STIT 结构。注意到主体 a 在任意 (w,h_w) 与 (X,h_w) 中只有一个选择。此外,对于任意 $a\in AGT$ 与 $x\in X$,$Choice(a,x)$ 划分了 $\{h_w:w\in X\}$。条件未分支历史的不可区分性平凡满足。至于条件主体的相互独立性,我们只需考虑 $x\in X$ 的情况。令 $choice_x$ 为任意定义域为 AGT 的函数满足 $choice_x(a)\in Choice(a,x)$。根据函数 $Choice$ 的定义,存在 $e_a\in E_{a,x}$ 满足 $choice_x(a)=\{h_w:h_w\in e_a\}$。令 f 为函数满足 $f(a)=e_a\in E_{a,x}$ 对任意 $a\in AGT$ 成立。注意到 w 与 h_w 的一一对应,故 $w\in f(a)$ 当且仅当 $h_w\in choice_x(a)$ 对任意 $a\in AGT$ 与 $w\in\cup X$ 成立。因此 $\cap_{a\in AGT}choice_x(a)\neq\emptyset$ 成立,函数 $Choice$ 满足主体的相互独立性。由于 $(T,<)$ 本身就是树,它显然是类树的。

给定一个如上面证明中定义的 STIT 结构,我们只需要定义合适的赋值函数与 $Name$ 函数便能构造出需要的模型。称赋值函数 V 是典范的,如果对于任意 $p\in PROP$,$(x,h_w)\in V(p)$ 当且仅当 $p\in w$ 成立。至于 $Name$ 函数,对于任意 $C\in CH$,任取 $w\in\cup X$,定义典范名字函数 $Name$ 如下:$Name_1(C)=a$ 当且仅当 $[a]C\in w$ 成立;$Name_2(C)=x$ 当且仅当存在 $w\in x$ 满足 $C\in x$;$Name_3(C)=\{(x,h_w):C\in w\wedge x=Name_2(C)\}$。$X$ 的构造特点确保了上面定义是成功的:任意 C 出现在唯一的 $R_\Box$-等价类 x 中;如果存在 $w\in\cup X$ 满足 $[a]C\in w$,则对任意 $w\in\cup X$ 均有 $[a]C\in w$。又由公理 A11 与 A6 以及极大一致集的性质可知存在唯一 $[a]C\in w$。当 $Name_1(C)=a$ 成立时,我们需要验证 $\{w\in x:C\in w\wedge x=Name_2(C)\}$ 确实是一个 $R_{a,x}$-等价类。令 $\Phi,\Psi\in x$ 且 $C\in\Phi$ 与 $C\in\Psi$ 成立,假定 $[a:cstit]\varphi\in\Phi$,需要证明 $\varphi\in\Psi$。不难知

道($([a:cstit]\varphi\wedge C\wedge[a]C)\in\Psi$,由公理$\Diamond([a:cstit]\varphi\wedge C\wedge[a]C)\rightarrow\Box(C\rightarrow\varphi)$与极大一致集的性质可知,$\varphi\in\Psi$ 并由 φ 的任意性知道 $\Phi R_{a,x}\Psi$ 成立。另一方面,假设 $\Phi\in\{w\in x:C\in w\wedge x=Name_2(C)\}$ 且 $\Phi R_{a,x}\Psi$ 成立,我们需要证明 $\Psi\in\{w\in x:C\in w\wedge x=Name_2(C)\}$ 同样成立。由前面可知$[a]C,C\in\Phi$ 则由公理 $C\wedge[a]C\rightarrow[a:cstit]C$ 可知 $[a:cstit]C\in\Phi$。因此 $C\in\Psi$ 且 $\Psi\in\{w\in x:C\in w\wedge x=Name_2(C)\}$ 同样成立。

引理 13(真值引理)给定极大一致集 Γ 与由其生成的典范框架(X,R),将由(X,R)转换得到的 STIT 结构记作 S。对于典范赋值 V 与典范 $Name$ 函数,对任意 $x\in X$ 与任意 $w\in\cup X$ 与公式 φ,我们有:$S,Name,V,(x,h_w)\models\varphi$ 当且仅当 $\varphi\in w$ 成立。

证明:施归纳于 φ 的结构。我们只考虑模态公式$\Box\varphi$ 与$[a:cstit]\varphi$ 的证明。

首先,$S,Name,V,(x,h_w)\models\Box\varphi$ 根据定义当且仅当任意 $v\in x$ 均有 $S,Name,V,(x,h_v)\models\varphi$。根据归纳假设,当且仅当任意 $v\in x$ 均有 $\varphi\in v$。由引理 9 可知当且仅当$\Box\varphi\in w$ 成立。

其次,$S,Name,V,(x,h_w)\models[a:cstit]\varphi$ 根据定义当且仅当任意 $v\in x$ 满足 $w R_{a,x}v$ 均有 $S,Name,V,(x,h_v)\models\varphi$。根据归纳假设,当且仅当任意 $v\in x$ 满足 $w R_{a,x}v$ 均有 $\varphi\in v$。由引理 9 可知当且仅当$[a:cstit]\varphi\in w$ 成立。

命题 14(强完全性)一致的公式集都是可满足的。

结语

本文首先对包含选择的能动命题进行逻辑分析,并在此基础上引入新的初始符号表示主体的选择,从而得到了包含选择的能动命题在 STIT 理论中的形式刻画。上述形式刻画并未蕴涵更多的哲学假设,因而对其他 STIT 算子同样适用。此外,本文为新得逻辑提供了一个可靠的公理系统,其中存在一条非标准规则 RA,并通过典范模型方法证明了公理系统的完全性。目前尚不清楚是规则 RA 是否必需。

选择名字 C 的引入增强了语言的表达力,令我们能够讨论更复杂精细的 STIT 结构。对 STIT 结构的进一步丰富,例如讨论主体针对不同选择的偏好等,可以借助选择名字得到较为直接的处理。另一方面,由于选择名字 C 的数学身份只是一类特殊的命题变元,我们有理由相信新初始符号的引入并不会破坏多主体 STIT 逻辑的可判定性,这将会是我们今后的工作方向,具体思路为证明逻辑具备有穷模型性质。

考虑公式 $C\wedge[a]C\wedge[a:dstit]\varphi$ 并将其缩写为$[a,C:dstit]\varphi$,我们得到了一种类似$[a,e:stit]\varphi$ 的新型 STIT 算子,直观读法正是主体 a 当前执行 C 真切地确保。算子 $[a,C:dstit]$不但在形式上更加紧凑,符号 C 更是能被纯粹地视作选择名字而非命题变元,因此无须考虑名字 C 的真假。该处理更符合人们对名字的直观。关于算子$[a,C:dstit]$的形式性质,也有待在今后的工作中探讨。

An Elementary Analysis of STIT Logic Extended with Choices' Names

HUANG Hua-xin & HE Jian-feng

(Department of Philosophy/Center for the Study of Language and Cognition, Zhejiang University, Hangzhou 310000, China)

Abstract: The STIT formalism proposed in the last century is a sort of logics of action which are based on the philosophical assumptions of branch time, indeterminism, and free choice. Using the so-called STIT operators, an accurate formal analysis of the agentive sentences can be conducted, and the agency of the sentence is emphasized. Nevertheless, the very concept of choice cannot be expressed within the framework of classical STIT formalisms, and this problem has been neglected more or less for a period of time. By introducing a new set of symbols and enriching the semantic structures, choices in the semantic model can now be denoted in our new formal languages. A sound and complete axiomatic of the new logic is presented.

Key words: STIT formalism; choice; axiomatization

(责任校对　朱正余)