doi:10.13582/j.cnki.1672-7835.2020.06.005

论数学结构主义对元数学对象的解释

程和祥[1,2],侯涛[3]

(1.西南政法大学 博士后流动站,重庆 401120;2.贵州省社会科学院 博士后工作站,贵州 贵阳 550002;
3.南京大学 哲学系,江苏 南京 210093)

摘 要:关于元数学对象在结构主义数学哲学中的地位,成为近年来数学哲学争论的焦点问题之一。当代著名数学哲学家 C·帕森斯认为,元数学对象只是个体独立的准具体对象,不会形成某种结构,那么结构主义对元数学对象的解释就是不成立的。与 C·帕森斯的观点相反,S·弗里德里希认为元数学研究的对象事实上是表示数学结构的形式符号,故数学结构主义可以应用于元数学对象。从“形式符号”的观点出发,根据数学对象的同一性标准,可以得出:元数学本身具有结构主义特性。因此,用数学结构主义对元数学对象进行解释是成立的。

关键词:结构主义;元数学对象;准具体对象;形式符号

中图分类号:B81-0 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-7835(2020)06-0037-05

由于 B·罗素提出的集合论悖论动摇了数学的基础,在 19 世纪末至 20 世纪初,当时数学哲学的中心任务是奠定数学的基础,为数学的合法性进行辩护,由此诞生了逻辑主义、直觉主义与形式主义三大数学基础流派。20 世纪三四十年代以后,关于数学基础的争论基本上有了较为明确的答案,现代数学的规范被牢固地确立起来。在此之后,从 20 世纪中期开始,数学哲学的问题意识开始转向,开始对现代数学的实践进行反思与分析,它试图在描述我们人类自身的数学认知活动的基础之上,对人类的数学认知活动做出客观的理解。换句话说,从本体论的角度来讲,非物质的数学对象所组成的数学世界是否为一个客观存在的世界?在认识论层面,人类这个有限的存在物,作为物质世界的一部分,究竟如何能认识那些独立于物质世界的、无穷的、非物质的数学对象?物质世界的我们,如何获得关于独立于物质世界的数学对象的知识或规律?不同的学派有不同的观点,结构主义作为数学哲学大家庭中的后起之秀,它最大的特点在于,在解释现代数学时提供了一个很好的回答策略,诸如现代数学所研究的几何空间,这种几何空间与现实的物质宇宙毫不相干,作为一种抽象结构,结构主义提供了很好的辩护。然而,当结构主义用来解释“元数学对象”时,C·帕森斯和 S·弗里德里希争论不休。本文在梳理两人分歧的基础上,就数学结构主义对元数学对象的解释试图做进一步的阐述。

一 数学哲学中的结构主义

结构主义的数学哲学思想最早可追溯到 19 世纪末,明确提出这种思想则是 20 世纪下半叶以后的事情,P·伯奈斯大约在 1950 年提出了结构主义的数学哲学思想。事实上,结构主义有一批著名的追随者,如 D·希尔伯特、J·庞加莱、P·贝纳塞夫和 H·普特南,连哲学家 W·蒯因也是数学结构主义的追随者。然而,他们几乎都没有为结构主义提供详细的辩护,也没有对结构主义本身作一个比较清晰而系统的思考。

一般而言,具体对象指的是存在于当代物理学所描述的宇宙时空中的对象。例如我们物理学中经常讨论的原子、化学课上讨论的元素和生物学尺度上的蝙蝠,这些都是具体对象。当然,远离

收稿日期:2020-05-16
基金项目:2020 年地方立法研究规划项目(DFLF2020Y06);国家社会科学基金青年项目(15CZX039)
作者简介:程和祥(1987—),男,湖北荆州人,博士,西南政法大学与贵州省社会科学院联合培养博士后研究人员,讲师,主要从事逻辑哲学和科学逻辑研究。

地球的星星,以及必须借助于科学仪器才能看见的基本粒子,它们也是具体对象。通俗地说,一切物质性存在,不管是微观的基本粒子,还是宏观的肉眼可见的生物或物体,甚至需要用望远镜(如FAST)观察的宇观尺度的天体,都是具体对象,都是可见的物质。用现代的量化标准,普朗克尺度(空间尺度大约 10^{-35} m,时间尺度大约 10^{-44} s)以上的事物,我们是能通过肉眼或借助于科学仪器确定地认识到的——就目前的物理学水平而言,这个尺度的极大极限是约130亿光年和约130亿年。但数学家所说的数、函数、集合等,它们显然不存在于宇宙时空之中——尽管宇宙如此浩瀚辽阔,却“容不下”它们,那么它们应该不是具体对象。假设“存在但又不存在于宇宙时空之中”这个说法没有歧义,那么数学对象作为客观地存在着的个体对象,就应该是所谓抽象对象,这种抽象对象显然和具体对象不同,它不是可见的物质,也不是暗物质,更不是暗能量。进一步讲,数学则是一门关于抽象对象的学科,这个学科的性质也明显不同于自然科学(物理、化学和生物)、社会科学(经济、法律、教育和管理等学科)和人文艺术科学(音乐、绘画和舞蹈等学科)。一般而言,自然科学是关于“物性”的科学,社会科学讨论“人事”,人文艺术科学关注“内心”。而数学,是研究数量、形状、结构以及信息等概念的一门学科,属于形式科学的一种。显然,数学的研究对象不同于“物性”,不同于“人事”,也无关“内心”。在数学结构主义看来,数学的本质不是抽象对象,而是相关对象内在属性的抽象结构关系,是所有系统所共有的结构。因为结构所依附的个体有不同类型,数学结构主义可以划分为四大学派:集合论结构主义、柏拉图式的结构主义、范畴论结构主义、模态结构主义。在S·夏皮罗看来,这些学派的核心观点其实是等价的。在这四大学派中,以S·夏皮罗、M·瑞兹尼克等为代表的柏拉图式结构主义影响最大。他们主张数学的本质是抽象结构,并强调抽象结构的实在性,也称为实在论结构主义。

结构主义数学哲学最主要的观点,可以概括为:在数学中讨论的最主要的东西不是具有个体独立性的数学对象,而是这些对象所组成的结构。正如C·帕森斯所说:“提到数学对象总是在一定的背景结构中才有意义,而且,数学对象仅仅是在结构中被那些基本关系的词项所表达出来。”①换句话说,数学的对象只是一定的关系系统中的不同位置的标记,公理通过指派确定的真值统辖着这些数学对象,尽管数学的实际研究中只对某一类数学结构感兴趣。所以,在结构主义的数学哲学看来,在数学中没有组成结构的内部对象,有的只是结构。当结构主义者提到数学对象的时候,只不过是结构中的不同的点和位置,而在结构之外,这些东西就没有了同一性与自己的特性,显得微不足道。举个例子说,数论所研究的对象并不是一个个自然数,而是研究整个ω-序列的性质及其内部关系,一个个自然数只是ω-序列中的表示不同性质或关系的“节点”或“位置”。这种无穷的数学,可以应用于有限的领域,这一点我们习以为常。

近年来,结构主义数学哲学的研究集中在以下几个方面:一是从形而上学的视角来看结构主义,比如关于结构主义的独立性宣言和不完全性宣言;二是从范畴论的角度来理解结构主义,一些结构主义者认为范畴论为结构主义提供了一个很好的理论框架;三是把唯名论和模态性结合起来,模态结构主义的新发展侧重于这一方面。

二　结构主义的元数学难题

我们在上面并没有区分一般数学与元数学,结构主义似乎对它们都是适用的。通常,元数学也归属于数学的一个分支,它的研究对象是一般的数学理论本身。例如,证明论显然是元数学的一个分支——它研究数学证明的结构以及数学理论的一致性等问题。另外,递归论、模型论和集合论,在一般的意义上也都可以看作是元数学。

结构主义数学哲学能不能解释元数学,C·帕森斯基于他的“准具体对象”观点,对此给予了否定的回答。

在元数学中,我们研究数学本身的概念和定理,而对这些概念和定理的表述,都必须用某一类语言符号来表达。所以,很自然地,人们可以把其中的符号和公式看作语言学对象,这种语言学对象类似于具体对象,C·帕森斯称之为“准具体对象”。他认为,准具体对象是这样一种对象,它们

①C.Parsons.“The structuralist view of mathematical objects”, *Synthese*, 1990(84): 303-346.

本身不是具体的,但是可以有具体的代入实例,因此它们直接地、合适地和具体对象相联系着。和一些字母记号相对应的字母类型,就是准具体对象的一个例子。所以,他认为准具体对象直接表现了或例示了具体对象。他说:“D·希尔伯特所谈的具体对象,在我看来就是指准具体对象。纯结构主义解释对于准具体对象来说似乎是不合适的,因为它们的表现关系是额外的东西加给结构中的关系的。”①这样一来,C·帕森斯的以下看法似乎是合理的:准具体对象在很大程度上是个体独立的,而且它们先于元数学的语境而出现。这一点与F·弗雷格对概念或定义的看法比较类似。在F·弗雷格看来,公理不可能精确地刻画一定类型的数学结构。于是,对他来说,定义和公理在数学理论的形式中起着一种不同的作用:具体来说,定义是首先出现的,然后在使用中,数学理论的所有概念才有了意义。他认为只有在给出了精确的定义之后才有概念的明确的思想,这样公理才能表达“真实的”真。因此,他论证说,形式公理刻画的其实是那些被预先假定了的概念。

由此可见,如果元数学对象是准具体对象,而准具体对象在很大程度上是个体独立的,独立的准具体对象之间就不存在任何关联,也就不会形成某种结构,那么结构主义对它的解释就是不成立的。这样一来,结构主义似乎的确不能解释元数学了!

三　元数学对象并不是准具体对象

结构主义者很自然地会想到要以结构主义的眼光来重新审视甚至解释元数学,C·帕森斯也这样想,但他认为问题会始终存在。事实上,我们可以对元数学语言构造一种解释使得它与结构主义的原则基本一致。有一点我们必须承认,关于元数学的价值以及关于它的解释,事实上都完全是作为数学的一个受尊重的分支,而且它似乎从不与结构主义的思想相冲突。

与C·帕森斯对结构主义元数学的反对相类似,一些数学学者试图将元数学算术化,其实这个尝试也行不通,因为它会使得元数学的证明是非元数学的。要建立起对元数学的结构主义解释,这从来不是也永远不会是关于语言学对象的。事实上,对元数学对象的理解,我们可以从以下三个方面来把握。

(一)元数学对象是形式符号

在S·弗里德里希看来,“结构主义在元数学上并没有什么大的问题,因此,结构主义者应当把他们的解释扩展到元数学当中去”②。他认为,元数学对象并不是C·帕森斯所说的准具体对象,而是表示数学结构的形式符号。

C·帕森斯的学术立场并不坚定,对于元数学对象是不是准具体对象表现出一种犹豫不决的态度。他曾说:“但是注意到符号和证明显然不是纯数学对象,而近似地是准具体对象。它们当然可能被认为是语法的对象,而它们本身只是一个结构,那么在一致性上的吸引力就可能简单地归约为另一种数学理论。”③于是,C·帕森斯认为,结构主义在解释元数学时会产生问题,因为元数学对象如果作为准具体对象的话,则结构主义无法对它进行解释(准具体对象对于结构主义解释是失效的)。我们下面将会看到,在证明论中的形式符号、公式和证明,并非是准具体对象,从而结构主义对元数学的解释并不会产生什么失效的问题。为了具体说明这一点,我们以皮阿诺算术(PA)理论本身作为讨论的例子。

假设皮阿诺算术PA的语言为$\mathcal{L}$,它的符号有:逻辑符号(在此不必列出)和非逻辑符号(即:$0, S, +, \cdot$)。在结构主义者看来,PA的符号当然只有在一定的结构即PA的关系中才是有意义的。而且我们知道,PA的符号完全可以是不同的字母——我们完全可以用不同的符号代替上面四个非逻辑符号,如:$\emptyset, \Omega, \oplus, \circledast$。从形式主义的观点看,PA的符号可以是任意一套符号系统,只要它能代表PA所处理的对象,能训练人的抽象思维能力,这些对象在弗里德里希看来其实就是形式符号,也就是说,PA中的符号只是用来表示PA作为元数学的形式符号的代入实例而已。既然元数学的符号可以是任意一套符号系统,只要它们作为元数学的形式符号的代入实例不会导致混乱就行。因此,把元数学对象看作语言学上所

①C.Parsons. *Mathematical Thought and its Objects*. Cambridge University Press, 2008, p.25.
②S.Friederich. Structuralism and meta-mathematics, “Trends in the Philosophy of Mathematics” conference, Frankfurt a. M., 2009, p. 77.
③C.Parsons. *Mathematical Thought and its Objects*. Cambridge University Press, 2008, p.37.

说的准具体对象,在很大程度上就是站不住脚的:如果元数学对象是准具体对象,那么它们就可以是“字母系统”。

(二)结构主义论题:同一性标准

关于数学对象的同一性标准,结构主义者提出了如下的结构主义论题(ST):数学对象的同一性标准必须具体化为包含在它们的关系中。我们下面从结构主义论题 ST 来考察一下元数学中的符号。

在结构主义看来,公式可以被个体化,因为对它们的观察很容易知道它们就是存在一定关系的。所以,对于结构主义者来说,PA 的语言$\mathcal{L}$的元素仅在元数学本身之内才具有个体性,而且关于它们的陈述其实就提供了它们的同一性标准,因为这种陈述本身就说明了它们是有关系的。但是,结构主义者还会认为,符号类型的同一性标准,虽然是在关系中表达的,但也不只是纯关系的,所以它们不能特殊化地仅仅用它们之间的关系来刻画。因此,为了维护结构主义在元数学中的可能性,也必须说明元数学对象不是关于“准具体”的数学对象。试想,一个小孩学会了一个词,他学会的是词的部分用法——在一定的语境或环境中的用法,他会使用这个词——因此他学会了这个词的符号类型而不仅是这个词的记号。

(三)元数学“应用于”准具体对象

我们有必要讨论一下元数学与它所用的符号或字母之间的关系。下面将会说明,从元数学到准具体对象,这个过程不是“元数学是关于准具体对象的”,而是“元数学是应用于准具体对象的”。那么,关于元数学的结构主义解释的表面问题就解决了。

首先,S·弗里德里希认为元数学是关于形式语言的,而非关于“字母”的。在结构主义看来,元数学本身就是一种应用,所以它可以被看作是应用于作为数学中的字母系统中的研究。其次,元数学对于字母系统的应用在很大程度上正如几何学对于物理空间的应用。再次,元数学是关于数学结构本身的,于是这里的理论本身变成了元数学的对象,从而元数学可以看作是研究理论本身或理论间的关系结构,即“理论的结构”。所以,对某些形式公理系统一致性的证明,使我们可以预知它的语言学对象系统不会出现关于矛盾的表达式。但是,结构主义对元数学的研究,并不关心它所处理的元数学内容本身,而是关心它的这种应用。

四　元数学本身的结构主义特性

上面我们已经反驳了 C·帕森斯的准具体对象观点。C·帕森斯本人是一个结构主义者,他之所以没有把结构主义解释扩展到元数学当中,是因为他觉得元数学对象只是准具体对象。当然,他在这一点上并没有给出非常充足的论证,而是持一种犹豫不决的态度。

从结构主义的观点来看,元数学并不是关于个体化的数学对象,而是“结构”。但是为了方便,结构主义者还是会经常提到“数学对象”——似乎是在个体化的意义层面提到的。当然,这只是为了方便,因为我们提到“数学对象”时,已经假定了它所属的背景系统或结构,因为结构才是初始概念。在理解这个问题上,叶峰指出:“作为一种数学哲学理论的结构主义,一般指的是将‘结构(structure)’作为原始概念,来对数学理论作新的解释,而不是用集合来定义结构。结构被理解为某种原初的东西,它们不是对象,也不是某种类型的集合。这包括了以范畴论为基础的对经典数学的重新表述。”①所以,结构主义在提到数学对象或元数学对象时,首先假定了“结构在先”这样一个结构主义的总原则。

我们在反对 C·帕森斯把元数学对象看作准具体对象的同时,就已经为结构主义走向元数学排除了最明显的一个障碍。同时,我们已经隐约地提到了“形式符号”,并且认为元数学对象就是形式符号。这里首先不要造成误解,认为形式符号就是指符号或形式系统中的符号。我们这里所指的形式符号,并不是人们肉眼可以看见的符号或记号,而是指可以被不同符号或字母代替的那个东西,它是一般数学所研究的结构,因此它本身也具有某种“本体”的地位。当然,这并不是说我们也承认“元数学对象”在本体论上的个体化,尽管这会是一个问题。

元数学是用严格演绎的方法来研究数学本身的数学理论,这种说法大家一般都会接受。这是

①叶峰:《二十世纪数学哲学——一个自然主义者的评述》,北京大学出版社 2010 年版,第 28 页。

否可以说,元数学对象就是“数学理论本身”。粗略地看,是可以这么说。但我们知道,在元数学里,我们并不只是比较各种数学理论之间的关系,而更多地是对一类数学理论的性质进行研究。这样,在元数学里,免不了把“对象数学”本身作为对象。因此,在元数学与非元数学之间,我们很难分出个界线来。这样,把元数学对象看作形式符号,即它代表某一类结构,也就是可以的。

五　结论与展望

在本文中,我们主要讨论了数学结构主义对元数学对象的解释问题,内容大致可以归结为如下几点。

第一,数学结构主义的核心观点是,数学对象在本质上只是结构中的位置,因此数学对象的个体化只是相对于结构中的关系才是存在的。结构主义也可以用于解释元数学,即元数学对象的个体化也只是相对于它所归属的结构。

第二,与 C·帕森斯的观点相反,S·弗里德里希认为元数学对象不是准具体对象,准具体对象在语言学研究中是合适的,但不适用于元数学对象,本文支持这种看法。

第三,符号类型或者说字母,只是表现、表达或表示元数学对象而不是关于元数学对象。

在以上讨论的基础上,本文概要式地对元数学给出了一种结构主义的解释。实际上,结构主义的数学哲学,在理论上还有许多工作要做,因为它必须面对一些基本的哲学问题,比如:到底什么是结构?结构主义是作为实在论还是作为反实在论的数学哲学?我们又是怎么认识结构的?以上这些问题都是比较重要的,而且是结构主义数学哲学必须回答的。

On the Interpretation of Meta-Mathematical Objects by Mathematical Structuralism

CHENG He-xiang[1,2] & HOU Tao[3]

(1. Postdoctoral mobile station of Southwest University of Political Science and Law, Chongqing 401120, China;
2. Postdoctoral workstation of Guizhou Academy of Social Sciences, Guiyang 550002, China;
3. Department of Philosophy, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

Abstract: Regarding the status of meta-mathematical objects in structural philosophy of mathematics, it has become the focus of the debate in recent years. C. Parsons, a famous contemporary mathematics philosopher argues that meta-mathematics objects are only quasi-specific objects, while quasi-concrete objects are independent of individuals. There is no structure that will be formed. Thus structuralism cannot be established when explaining meta-mathematics. Contrary to C. Parsons's point of view, S. Friedrich believes that the object of meta-mathematics research is a formal symbol that represents a mathematical structure. Therefore, mathematical structuralism can be applied to meta-mathematical objects. From the point of view of "formal symbols", according to the criterion of the identity of mathematical objects, it can be concluded that meta-mathematics itself has the characteristics of structuralism. So mathematical structuralism can explain the objects of meta-mathematics.

Key words: structuralism; meta-mathematical objects; quasi-specific objects; formal symbols

(责任校对　王小飞)