

doi:10.13582/j.cnki.1672-7835.2024.03.005

说谎者悖论：语言学中的一种代数学现象

文兰

(北京大学 数学科学学院,北京 100871)

摘要:从关于说谎者悖论的“句方程”方案中可以提炼出总的看法:说谎者悖论是语言学中一种相当纯粹的代数学现象。这是“句方程”方案的必然结论。实际上,“句方程”方案全面吸收了代数学的思想成果,从基本定义开始,就是参照代数学的思想建立和展开的。而之所以可以把说谎者悖论与代数学做如此深度的连接,根本原因在于三卡悖论的发现。三卡悖论是说谎者悖论与布尔代数深度相关的无可辩驳的证据,是“句方程”方案立论的基础。

关键词:说谎者悖论;布尔方程;句变元;句方程

中图分类号:B81 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-7835(2024)03-0035-08

说谎者悖论是一个内涵非常丰富的逻辑学和语言学问题,古往今来关于说谎者悖论的文献卷帙浩繁。20年前笔者对说谎者悖论提出了一种“句方程”解悖方案^①,未能引起多少注意。后来笔者写了一本小册子^②和一篇文章^③试图对这个方案做进一步的阐述,但真正使学界注意到这个方案的,是2023年5月由南京大学现代逻辑与逻辑应用研究所、江苏省逻辑学会和国家社会科学基金重大项目“广义逻辑悖论的历史发展、理论前沿与跨学科应用研究”课题组联合主办的悖论问题研讨会。广义逻辑悖论重大项目课题组成员和百余老中青学者参加了研讨会,热烈讨论了“句方程”方案,认为这个方案值得关注。之后《逻辑学动态与评论(第二卷第二辑)》(2023)又围绕“句方程”方案推出了数篇文章,包括5月研讨会的长篇综述,成为讨论“句方程”方案的一部重头文献。

本文对“句方程”方案的基本思想做一个提炼,总的看法是,说谎者悖论是语言学中的一种相当纯粹的代数学现象。比如“句方程”方案有一

个特点:不需要界定“句子”一词的“内涵”,而只需界定“句子”一词的“外延”。就是说,只需为文章的讨论取定一个论域,其中的元素就叫做“句子”,至于所取论域究竟是什么集合、什么类,并不重要。之所以如此,是因为“句方程”方案从基本定义开始,就是参照代数学的思想建立和展开的。而之所以可以把说谎者悖论与代数学做如此深度的连接,根本原因在于三卡悖论的发现。三卡悖论是说谎者悖论与布尔代数深度相关的无可辩驳的证据,是“句方程”方案立论的基础。当然,说谎者悖论无论作为多么纯粹的代数学现象,也是“语言学中的”代数学现象。本文最后两节尝试从语言学角度看待说谎者悖论,请读者批评。

一 说谎者悖论与它的推理

导致说谎者悖论的句子形式的标准记法为:“ $L:L$ 为假”。其中 L 表示短语“这个句子”,冒号“:”表示“意指”,用语言来说就是:“这个句子”意指“这个句子为假”^④。

若这个句子为真,则肯定其所述,故这个句子

收稿日期:2024-01-25

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11831001)

作者简介:文兰(1946—),男,安徽泾县人,中国科学院院士,第三世界科学院院士,教授,博士生导师,主要从事微分动力系统研究。

①Wen, L., “Semantic Paradoxes as Equations”, *The Mathematical Intelligencer*, 2001(23): 43-48.

②文兰:《悖论的消解(第二版)》,科学出版社2018年版。

③文兰:《说谎者悖论的隐蔽的假设》,《逻辑学研究》2022年第2期。

④张建军:《逻辑悖论研究引论》,人民出版社2014年版,第4页。

为假,矛盾。若这个句子为假,则否定其所述,故这个句子为真,也矛盾。

“ $L:L$ 为假”和这段推出矛盾的推理,合起来就是说谎者悖论。这段推理简短清晰,在众目睽睽之下推出了矛盾,但看不出任何破绽,困惑了人们两千多年。所谓解悖,就是找出其中推出矛盾的原因。

这段推理字字有其用意。可以说,说谎者悖论的一切奥秘都藏在这段推理之中。比如为什么上列标准记法要表述为“ $L:L$ 为假”,即为什么说谎者悖论不是关于一个单一的对象“这个句子为假”的问题,而是事关两个对象的关系:“这个句子”意指“这个句子为假”,原因就藏在这段推理之中。为此只需看推理的前一半“若这个句子为真,则肯定其所述,故这个句子为假,矛盾”就够了:关键是“其所述”三个字。从上下文看,显然“其”是指短语“这个句子”,“其所述”是指“这个句子为假”。就是说,短语“这个句子”的所述是“这个句子为假”,或者说短语“这个句子”意指“这个句子为假”。也就是说,说谎者推理本身就告诉我们,说谎者悖论是两个对象之间的意指关系。

但有的作者不太注意悖论的推理。笔者曾在一些英文文献里看到作者把说谎者推理大大咧咧叙述成:If it is true then it is false; and if it is false then it is true(若这个句子为真,则这个句子为假;若这个句子为假,则这个句子为真)。严格地讲,这不能算是一个推理。这相当于说了“这是一个矛盾”。由于悖论本来就是“推出”矛盾,所以这就相当于没有说出什么。需要解释为什么从“这个句子为真”可以推出“这个句子为假”。其实这个解释只有6个字:“则肯定其所述”,但这6个字本质上就是说谎者悖论的基本原理“T-模式”。漏掉了这6个字,说谎者推理就被掏空了,无从分析了。

这样的情况其实并不少见,就连名著《哥德尔、艾舍尔、巴赫》在陈述了“这个句子是假的”之后,也把推出矛盾的推理“留给读者”(该书对其他几个悖论也都是这样处理的,都是把悖论的推理“留给读者”)^①。悖论是推出矛盾但原因不明

的推理。一个悖论,不是问读者如何推出矛盾,而是在展示了如何推出矛盾之后,问读者,这看似无隙可击的推理推出矛盾的原因是什么。这看似无隙可击的推理必须由出题者提供,怎么能“留给读者”呢?

推出矛盾的推理是悖论的核心内容,必须一字一板给出。叙述一个悖论,重点是叙述其推理,不能有任何含混和遗漏,更不能整个“留给读者”。

二 说谎者悖论研究只需界定“句子”一词的外延

有关说谎者悖论的文献里,出现频率最高的词汇恐怕是“句子”了。说谎者推理“若这个句子为真,则肯定其所述,故这个句子为假,矛盾。若这个句子为假,则否定其所述,故这个句子为真,也矛盾”本身就反复使用“句子”一词。一篇关于说谎者悖论的文章,可以说到处都是“句子”一词。比如本文第一节,一页不到,“句子”一词就出现了26次。说谎者悖论研究文献中,“句子”一词出现之海量无法估计。

但什么是“句子”,似乎并未得到足够的关注。这使得关于说谎者悖论的讨论常常有一些含糊。在用形式化方法讨论说谎者悖论的文献中,“句子”一词是有明确的、形式的定义的,但说谎者悖论自古以来就是在自然语言中流传的一个问题,用自然语言对它进行研究是理所当然的、不可回避的。这就提出了一个重要的问题:怎样针对用自然语言研究说谎者悖论的需要,为“句子”一词提供明确的定义。

不同的解悖方案对“句子”一词的定义的要求程度应该不同。就“句方程”方案而言,要求不是最高的,不需要界定“句子”一词的内涵,但必须界定其外延,即必须为文章的讨论选定一个论域,论域的元素就被叫做“句子”。笔者曾在文章中取过一个形式化的论域,其中的元素就是没有内部结构的^②。后来在讨论说谎者悖论、雅布罗悖论、寇里-吉奇悖论时,笔者为直观起见都取了全体命题的类 \mathcal{P} 做论域,并声明:以下常把命题叫

^①Hofstadter, D. R. *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, New York: Basics Books, 1979.

^②Wen, L. “Semantic Paradoxes as Equations”, *The Mathematical Intelligencer*, 2001(23):43-48.

做“句子”,以便和说谎者悖论的用语一致^①。

但对“句方程”方案来说,论域不一定要取作命题的类 \mathcal{P} ,只要确定某个论域 \mathcal{L} 就够了。这就是为什么笔者曾经为说谎者悖论的讨论取了一个抽象的、形式化的论域。“句方程”方案的 4 个概念“句变元”“句变元的值”“句方程”“句解”,都是相对于所取定的论域 \mathcal{L} 来说的,其完整名称是“ \mathcal{L} 上的句变元”“句变元在 \mathcal{L} 中的值”“ \mathcal{L} 上的句方程”“句方程在 \mathcal{L} 中的解”。为避免名称过于冗长,我们常常省略“ \mathcal{L} 上的”和“ \mathcal{L} 中的”,但要清楚“ \mathcal{L} 上”的意思是与 \mathcal{L} 有关但在 \mathcal{L} 之外,“ \mathcal{L} 中”的意思是在 \mathcal{L} 之内。换句话说,“句变元”是在论域之外的,而“句变元的值”是在论域之内的。“句方程”是在论域之外的,而“句解”是在论域之内的。

理解说谎者悖论,不需要界定“句子”一词的内涵,而只需界定“句子”一词的外延。就是说,只需为文章的讨论取定一个论域,其中的元素就叫做“句子”,至于所取论域究竟是什么集合、什么类,并不重要。这个论域可以是任何一个带有谓词“意指”和“为真”的逻辑系统 \mathcal{L} ,只要取定就好。本文后面会几次解释这一点。

三 说谎者悖论中的短语“这个句子”不能表示所取论域的任何元素

“句方程”方案的主要结论是,说谎者悖论的短语“这个句子”,即“ $L:L$ 为假”的 L ,是一个句变元,从而“ $L:L$ 为假”是一个句方程。这个句方程无句解,即 L 不可能被替换为论域中的任何元素。这里用了不少术语像“句变元”“句方程”“句解”,让我们先尽量不用这些术语把这个问题陈述出来:

基本问题 1. 说谎者悖论里的短语

“这个句子”,即“ $L:L$ 为假”里的 L ,为什么不能表示所取论域的任何元素?^②

这里“所取论域的元素”是准确的说法。通常的说法是问: L 为什么不能表示任何具体的、真正的句子?但是,如果“句子”一词本身如上节所述含义不清楚的话,加上再多的形容词“具体的”“真正的”(specific, proper),含义也不会更清楚。对“句方程”方案来说,所谓“句子”就是所取论域的元素,所谓“具体的句子”“真正的句子”也就是“句子”,因此也就是所取论域的元素。换句话说,对“句方程”方案,不需要在“句子”一词前面加“具体的”“真正的”等形容词。

但主流的观点不同。主流的观点认为说谎者悖论中的短语“这个句子”在这里是指一个“具体的、真正的句子”^③。由于短语“这个句子”信息较少,为让人们信服,主流观点用各种方式加强这个短语的描述,比如说成“这个卡片上的句子”“本页第 5 行的句子”等。蒯因更宣布有一种构造性的方法来构造说谎者“句子”^④。

笔者认为,无论怎样加强短语 L 的描述,哪怕把 L 描述得像“2023 年 6 月 1 日中午 12 点北京大学第一教学楼 101 教室黑板上唯一的句子”那样逼真,那样没有歧义,由于约束条件“ $L:L$ 为假”的缘故, L 仍然不可能表示任何“具体的、真正的句子”。罗素认为描述词与专名有根本的区别是很有见地的。罗素应该没有想到说谎者悖论也与此有关,但说谎者悖论的矛盾所证明的正是:由于外部约束条件“ $L:L$ 为假”的限制,对 L 的描述(摹状)无论加强到什么程度都不可能达到专名的效果。这个耐人寻味的基本问题 1,到本文的后面可得到最终回答。

四 “句方程”方案简单回顾

关于“句方程”方案可参见几篇文献^⑤。基本想法是这样来的:起初笔者发现说谎者悖论“ $L:L$

^①参见文兰:《说谎者悖论的隐蔽的假设》,《逻辑学研究》2022 年第 2 期;《强化版说谎者悖论的一个解决方案》,《逻辑学动态与评论(第二卷第二辑)》,中国社会科学出版社 2023 年版。

^②文兰:《说谎者悖论的隐蔽的假设》,《逻辑学研究》2022 年第 2 期。

^③北京大学哲学系邢滔滔教授称主流观点为“句子说”。相比之下,句方程观点也就被称为“非句说”,参见邢滔滔:《论“说谎者非句说”》,《逻辑学动态与评论(第二卷第二辑)》,中国社会科学出版社 2023 年版。

^④参见 Quine, W. V. *The Way of Paradox and Other Essays*, Harvard University Press, 1976。邢滔滔教授对蒯因构造有深入的分析,认为该构造不成功,参见邢滔滔:《论“说谎者非句说”》,《逻辑学动态与评论(第二卷第二辑)》,中国社会科学出版社 2023 年版。蒯因是要构造“句子”的,因此更需要有“句子”的准确定义,才能说清楚他构造的字符串为什么是一个“句子”。

^⑤参见文兰:“Semantic Paradoxes as Equations”, *The Mathematical Intelligencer*, 2001(23): 43-48;《悖论的消解(第二版)》,科学出版社 2018 年版;《说谎者悖论的隐蔽的假设》,《逻辑学研究》2022 年第 2 期;《强化版说谎者悖论的一个解决方案》,《逻辑学动态与评论(第二卷第二辑)》,中国社会科学出版社 2023 年版。

为假”的推理与布尔方程 $x = \bar{x}$ 无解的反证法很像,只是后者是有头有尾的反证法,而前者却是没头没尾的悖论。虽然二者的类比过于简单,但由于笔者此前已经通过理发师悖论认识到悖论是反证法的掐头去尾,所以很重视二者的类比。为证明把说谎者悖论与 $x = \bar{x}$ 无解的反证法联系起来不是生拉硬扯,笔者把一个三元布尔方程组无解的反证法掐头去尾翻译成自然语言,果然成了一个令人眼前一亮的“三卡悖论”,这证明说谎者悖论确实与布尔方程有深度的关联。于是有充分的理由对一个确定的论域 \mathcal{L} (比如全体命题的类 \mathcal{P}),按照代数学的思想引进“句变元”“句变元的值”“句方程”“句解”(如上所述,全名是“论域 \mathcal{L} 上的句变元”等) 4 个概念。这样,“ $L:L$ 为假”就成了该论域上的一个句方程,布尔方程 $x = \bar{x}$ 无解就对句方程“ $X:X$ 为假”无句解,说谎者悖论的秘密就被解开了,具体对应如下。先看布尔方程:

定理 A: 布尔方程 $x = \bar{x}$ 无解。

证明: 假设该方程有解,即假设存在 x 的一个值(即布尔代数的元素 0 或 1)使该方程两端相等。为简便,直接用 x 表示这个值。

若 $x = 1$,则由方程, $x = 0$,矛盾。反之,若 $x = 0$,则由方程, $x = 1$,也矛盾。

此矛盾证明该布尔方程无解。证毕。

有了“句方程”“句解”等新术语,就可以把定理 A 翻译成自然语言了:

定理 A': 句方程“ $X:X$ 为假”无句解。

证明: 假设该句方程有句解,即假设存在 X 的一个值(即论域 \mathcal{L} 的元素) L 使得 $L:L$ 为假。

若 L 为真,则肯定其所述,故 L 为假,矛盾。反之,若 L 为假,则否定其所述,故 L 为真,也矛盾。

此矛盾证明该句方程无句解。证毕。

这个反证法的中段就是说谎者推理。这等于

给说谎者推理添上了反证法的头尾,于是看出:说谎者推理隐蔽地假设了“ L 是一个值”。这就找到了说谎者悖论推出矛盾的原因,也就解答了这个悖论。

注意定理 A' 的证明提到了论域 \mathcal{L} ,但没有,也不需要指明 \mathcal{L} 具体是什么集合、什么类(比如是不是 \mathcal{P})。这解释了第二节末的那段话:理解说谎者悖论,只需为文章的讨论取定一个论域,其中的元素就叫做“句子”,至于所取论域究竟是什么集合、什么类,并不重要。

五 句变元:一个来自代数学的概念

上一节说到“句方程”方案的 4 个概念“句变元”“值”“句方程”“句解”,其中句变元是最基础的一个,一旦定义好,其他三个就比较容易定义了。笔者当年学习代数课程时,并未觉得“变元”概念有多么微妙,但现在感觉“变元”概念微妙得惊人。这是怎么回事呢?也许是因为当时匆匆开始做习题了,而这一次则要仔细品味“变元”概念的数学、逻辑学、哲学的含义吧^①。让我们回顾一下代数学的变元的定义:

定义: 数集 K 上的一个变元是一个符号,常记为 x, y, z , 用来表示 K 的元素,但尚未确定表示 K 的哪个元素。变元所表示的 K 的元素称作该变元的值。比较一下句变元的定义:

定义: 论域 \mathcal{L} 上的一个句变元是一个符号,常记为 X, Y, Z , 用来表示 \mathcal{L} 的元素,但尚未确定表示 \mathcal{L} 的哪个元素。句变元所表示的 \mathcal{L} 的元素称作该句变元的值。^②

二者完全相同。代数学定义“变元”只需要一个数集 K , 不需要知道具体是哪个数集。同样,定义“句变元”只需要一个论域 \mathcal{L} , 不需要知道具体是哪个论域。这再一次解释了第二节末的那段话:理解说谎者悖论,不需要界定“句子”一词的内涵,而只需界定“句子”一词的外延。就是说,只需为文章的讨论取定一个论域,其中的元素就叫做“句子”,至于所取论域究竟是什么集合、什么类,并不重要。这说明说谎者悖论是语言学

^①莫绍揆先生所著《数理逻辑初步》(上海人民出版社 1980 年版)对变元概念有深刻的论述,迄今仍值得参考。

^②文兰:《强化版说谎者悖论的一个解决方案》,《逻辑学动态与评论(第二卷第二辑)》,中国社会科学出版社 2023 年版,第 8 页。

中一种相当纯粹的代数学现象,不涉及各个“句子”的具体语义。

但不涉及具体语义并不意味着问题就不微妙。实际上,既“用来表示”,又“尚未确定表示”,十分微妙。这也给出了“句变元”和“值”的分界:二者共同的基本要求是“用来表示论域的元素”,下分两类,一是“已经确定表示论域的哪个元素”,二是“尚未确定表示论域的哪个元素”(后者又分两个子类:以后会确定表示哪个元素和永远不可能确定表示哪个元素),前者就是一个“值”,后者就是一个“句变元”。由此得到一个“非此即彼”的二分法:

二分引理:说谎者悖论“ $L:L$ 为假”的 L 若不是一个值则一定是一个句变元。

证明: L 是短语“这个句子”(或“这个卡片上的句子”等),是用来表示句子的,所以首先满足基本要求:用来表示论域的元素。于是,据上一自然段的分析, L 或者是一个值,或者是一个句变元。

“句方程”方案的主要结论是:说谎者悖论“ $L:L$ 为假”的 L 是一个句变元。“二分引理”虽简单,却是通向这个结论的重要阶梯。

六 “ L 是一个值”:一个来自代数学的假设

“句方程”方案的想法是把说谎者悖论与布尔反证法做对照。大约几年前,笔者想到写一本小册子详细解释这些想法,写着写着忽然想到,对说谎者悖论如此处理,只说是因为代数学是如此做的就行了吗?代数学说 $x = \bar{x}$ 无解的反证法用到了“ x 是一个值”的假设,你就跟着说,说谎者推理也用到了“ L 是一个值”的假设,但真的用到了这个来自代数学的假设吗?

这一问不得了,笔者发现当时不会回答。让我们把问题明确陈述出来:

基本问题 2. 说谎者推理哪里用到了“ L 是一个值”(“值”就是所取论域中的元素)的假设?^①

再具体些,说谎者推理的前半段是:“若 L 为

真,则肯定其所述,故 L 为假,矛盾。”短短 16 个字,请问哪里用到了“ L 是一个值”的假设?

笔者当时苦思了很多天,找不到。又到 $x = \bar{x}$ 无解的反证法(即第四节定理 A 的证明)里去找,竟然也找不到。这还得了,这已经是代数学了,“ x 是一个值”的假设肯定用在了某个地方,但就是找不到,笔者的代数课是怎么学的?最后找到了,答案却很简单,把代数语言翻译成自然语言就回答了说谎者悖论的问题^②。笔者曾几次写下过这个答案,借此机会再高调写一次,因为它太重要了:

在这个推理过程中, L 必须始终代表同一个确定的句子,它既真又假才是矛盾。如果 L 在这个推理过程中可以变,那它既真又假就不是矛盾。换句话说,当我们断言“矛盾”时,就不自觉地用到了“ L 是一个值”的假设。

原来,如果不假设 L 是一个“值”,而是可以变,那它既真又假就不是矛盾。基本问题 2 的答案多简单啊!说谎者悖论到这里忽然觉得真懂了,“隐蔽的假设”原来隐蔽在这里。因此,基本问题 2 的提出虽然比笔者最初的文章晚了十几年,但也应属于“句方程”方案,而且是一个关键点。

“ L 是一个值”,或者说“ L 在推理过程中不可以变”,这一假设也太不起眼了,太让人视而不见了。难怪该假设在说谎者推理中隐藏了两千多年。若不是历史上代数学发现了“ x 是一个值”的假设不是可有可无的而是一个实质性假设,给了我们启发,我们是否至今也不会意识到说谎者推理用到了“ L 是一个值”的假设呢?

最后解释一下,上面把“ L 是一个值”和“ L 在推理过程中不可以变”替换使用,是因为二者在我们讨论的问题里是等价的。若 L 是一个值则当然在推理过程中不可以变,反之,若 L 不是一个值,则据二分引理,是一个句变元,按定义就不确定表示论域的哪个元素,也就可以变。

有的读者可能认为,上面这段粗体字讲述的道理似乎太简单了。但最简单的也就是最强大的。据此稍加反思不难弄清:不仅说谎者悖论,所

^①文兰:《说谎者悖论的隐蔽的假设》,《逻辑学研究》2022 年第 2 期。

^②文兰:《悖论的消解(第二版)》,科学出版社 2018 年版,第 46—47 页。

有与“句子”“意指”“真假”有关的悖论如强化版说谎者悖论、雅布罗悖论、寇里-吉奇悖论以及各种“复仇”悖论,其推理都隐蔽地用到了其中的句子“是一个值”的假设。道理是一样的:若推理中有关的“句子”(说谎者悖论或强化说谎者悖论的 L 也罢,雅布罗悖论的 S_n 也罢,寇里-吉奇悖论的 B 也罢)不是一个“值”,而是可以变,那它就推不出矛盾。推理中隐蔽地假设了它们“是一个值”是所有这些推理推出矛盾的原因^①。

七 “ $L:L$ 为假”是一个无解句方程:一个来自代数学的结论

现在可以回答基本问题1了。既然说谎者推理用到了“ L 是一个值”的假设而推出矛盾,由反证法原理立得, L 不是一个值,而是一个句变元 X (这里用到了二分引理),从而说谎者悖论“ $L:L$ 为假”是一个句方程“ $X:X$ 为假”,而且是一个无解句方程。尽量不用这些术语来说就是 L 不能表示所取论域的任何元素。也就是说,对 L 的描述(摹状)无论加强到什么程度都不可能达到专名的效果。这就是期待已久的基本问题1的答案,是基本问题2的直接推论。这个答案很短,但含义很深。

“ $L:L$ 为假”是一个无解句方程的结论,直接源于第六节那一段粗体文字。那段文字不依赖于论域的选取。不论对哪个论域 \mathcal{L} ,那段文字里最核心的一句“如果 L 在这个推理过程中可以变,那它既真又假就不是矛盾”都成立。这说明,上述结论对任何论域 \mathcal{L} 都成立:

说谎者悖论的普遍结论. 对说谎者悖论的任何论域 \mathcal{L} ,说谎者推理推出矛盾都是因为用到了“ L 是一个值”的假设,因此 L 都不是一个值而是一个句变元,从而“ $L:L$ 为假”都是 \mathcal{L} 上的一个句方程,而且是一个无解句方程。

这再一次解释了第二节末那段话:理解说谎者悖论,不需要界定“句子”一词的内涵,而只需界定“句子”一词的外延。从某种意义上讲“句方程”方案的一个优势在于,因为它的结论不依赖于论域的选取,无论讨论中的“句子”一词的含义是什么,只

要有其确定的论域,“句方程”方案都可以与之对接,“句方程”方案的结论对之都成立。

八 三卡悖论是“句方程”方案立论的基础

以上从第二节到第七节,我们从各个角度说明了说谎者悖论是语言学中一种相当纯粹的代数学现象。这是“句方程”方案的必然结论,因为“句方程”方案从基本概念“句变元”“值”“句方程”“句解”开始,到推理的隐蔽假设“ L 是一个值”,再到主要结论“ L 是一个句变元”“说谎者悖论是一个无解句方程”,都是按照代数学的思想建立和展开的,是用代数学的语言表述的。因此最后需要回答一个问题:为什么可以把说谎者悖论与代数学进行如此深度的连接?

这一切都是由于三卡悖论的发现。尽管说谎者悖论与布尔方程 $x = \bar{x}$ 的对比已经揭示了说谎者悖论与代数学的关系,但这个对比太简单,让人不敢相信。双卡悖论与布尔方程组 $x = \bar{y}, y = x$ 的对比也太简单。于是笔者想,找一个三元布尔方程组看看吧,索性把逻辑连词“且”和“或”也拉进来,看翻译过来是什么样子。于是笔者尝试建构了一个最简单的满足需要的无解三元布尔方程组 $x = y\bar{z}, y = \bar{x} + z, z = xy$ 。20年前,当看到这个方程组无解的反证法被掐头去尾翻译成一个从未见过的却又完全是说谎者型的“悖论”时,笔者感到说谎者悖论的神秘的大门被打开了(笔者强烈建议读者实地做一遍这个翻译,体验一下笔端流出一个新的说谎者型悖论的感觉)^②。这证明说谎者悖论确实与布尔方程深度相关,否则怎么会又造出一个三卡悖论来?说谎者悖论是自古就有的,也许有各种解释,但三卡悖论是本来没有的,除了那个三元布尔方程组,除了代数学,三卡悖论没有任何别的来源,它不是代数学现象还能是什么?而且显然不只是“三卡悖论”,类似还有四卡、五卡,任意多卡的说谎者型悖论,背后是一个巨大的“悖论”家族^③。从那一刻起笔者就坚信,与无解布尔方程的联系是说谎者悖论的真正秘密。于是笔者按照代数学的思想,一口气建立了“句变元”

①文兰:《强化版说谎者悖论的一个解决方案》,《逻辑学动态与评论(第二卷第二辑)》,中国社会科学出版社2023年版,第14页。

②文兰:《说谎者悖论的隐蔽的假设》,《逻辑学研究》2022年第2期。

③熊明:《斯穆里安谜题与说谎者型悖论的真值表构造》,《逻辑学动态与评论(第二卷第二辑)》,中国社会科学出版社2023年版。

“值”“句方程”“句解”4个概念,陈述了“句方程”方案对说谎者悖论的解答,后来又用这些代数语言提出了基本问题1和2,形成了较为系统的“句方程”方案。可以说,三卡悖论是说谎者悖论与布尔方程 $x = \bar{x}$ 深度相关的铁证,是“句方程”方案立论的基础。

如果对三卡悖论提出同样的问题,答案就容易得多。比如问,三卡悖论是语言学中的代数学现象吗?答案就不用思考:当然是的。三卡悖论是布尔方程反证法的翻译,是用自然语言叙述的布尔方程问题,当然是语言学中的代数学现象。那么,说谎者悖论不也是如此吗?

九 “句方程”方案与罗素“表示”理论的关系

以上讨论说明了说谎者悖论是语言学中一种相当纯粹的代数学现象。但说谎者悖论毕竟是“语言学中的”代数学现象。在本文余下的两节,笔者尝试从语言学角度看待说谎者悖论,也对“变元”概念之微妙做点进一步的说明,请读者批评。

与句方程概念密切相关的是罗素的“表示短语”(denoting phrase)的概念^①。表示短语可以定义为带有描述的名词,如罗素给出的例子“一个人”“某个人”“任何人”“每个人”“所有人”“当今英国国王”“当今法国国王”“20世纪第一个瞬间太阳系的质量的中心”等等。表示短语总能抓住所要表示的对象吗?罗素的名篇《论表示》指出并非如此,有的表示短语不确定表示任何对象(“denoting phrases which do not denote anything”),如“当今法国国王”就不确定表示任何对象。其原因,从这个短语本身就可以看出^②。

说谎者悖论的短语“这个句子”,即“ $L:L$ 为假”里的 L ,就是一个表示短语。基本问题1(见第三节)说,这个短语不确定表示任何“具体的句子”(即论域的元素),这支持了罗素的上述看法。但与短语“当今法国国王”不同的是,短语“这个句子”本身并没有问题,在一般情况下都能确定地表示某个具体的句子,比如“这个卡片上的句

子”完全可以表示“雪是黑的”这样一个具体的句子^③。它之所以在说谎者悖论这里不能确定地表示任何具体的句子,原因出在该短语外部,是它与自己之间的一个矛盾的意指关系“ $L:L$ 为假”(在三卡悖论时,则是与其他短语之间的一组矛盾的意指关系)所致。这个意指关系(冒号“:”和谓词“为假”)相对于该短语 L 来说,是外部的约束条件。只在该短语 L 内部加强描述,如上所述,哪怕加强到“2023年6月1日中午12点北京大学第一教学楼101教室黑板上唯一的句子”的程度也没有用, L 外部的约束条件“ $L:L$ 为假”仍然迫使这个超长的短语 L 不确定表示任何具体的句子。

“句方程”方案的四个核心概念——“句变元”“句变元的值”“句方程”“句解”,都是从代数学的“变元”“变元的值”“方程”“解”的概念搬过来的。近来笔者发现,这四个概念的前两个,即“句变元”和“句变元的值”,恰是罗素的“表示短语”(denoting phrase)及其所要表示的对象(denotation)在主词是“句子”时的情形。实际上,当表示短语的主词是“句子”时(如“这个卡片上的句子”“本页正数第5行的句子”),这个短语就是用来表示句子的,按定义就已经满足了“句变元”和“值”的基本要求:用来表示论域的元素。罗素认为表示短语不确定表示什么对象,正符合句变元定义所说的:不确定表示论域的哪个元素,只不过句表示短语是一个短语,而句变元是一个符号。但只要用一个字母来简记这个句表示短语(用字母简记某个对象是永远允许的),就成了句变元。可见主词为“句子”的表示短语就是句变元,是自然语言形态的句变元,也可见“句变元”的概念本来就存在于语言学之中。

既“用来表示”,又“不确定表示”,这恰是罗素的“denoting phrases which do not denote anything”,既“denoting”,又“do not denote”。英文有其方便之处,有“denoting”和“denote”的区别,中文没有。罗素的既“denoting”又“do not denote”,中文当然不能表述为:既“表示”又“不表示”。笔者的表述是:既

^①Russell, B. “On Denoting”, *Mind*, New Series, 1905, 14(56), pp. 479–493.

^②关于“句方程”方案与罗素“表示”理论的关系的讨论,可参见邢滔滔:《论“说谎者非句说”》,《逻辑学动态与评论(第二卷第二辑)》,中国社会科学出版社2023年版。

^③文兰:《强化版说谎者悖论的一个解决方案》,《逻辑学动态与评论(第二卷第二辑)》,中国社会科学出版社2023年版,第16页。

“用来表示”又“不确定表示”。由此可见“变元”概念之微妙,以及中文表述的细微用心。

“句方程”方案的后两个概念“句方程”和“句解”则是罗素的表示理论所没有的,这两个概念体现了表示短语与表示短语之间的关联,契合了说谎者悖论中“ $L:L$ 为假”的构造特点。因此也许可以说,“句方程”理论是罗素表示理论的延伸。

十 “代”与“求”:说谎者悖论的隐蔽的语言学关键词

如上所述,说谎者悖论的要害是推理中的一个隐蔽的假设:“ L 是一个值”。这个隐蔽的假设是受代数学的启发而发现的,却有着自身的语言学根源。这个根源可以归结为一个语言学关键词“代”,即“代词”“代表”“代替”“代名”“代号”等的“代”。说谎者悖论的短语“这个句子”,不就是一个关于“句子”的代词吗?说谎者悖论与“代词”概念一定有说不尽的渊源,值得研究。既然是“代词”,是“代表”,就先验地不等同于所要代表的对象。可能确定代表了哪个对象(对应于代数学的“值”),也可能尚未确定代表哪个对象(对应于代数学的“变元”),还可能永远不确定代表哪个对象(对应于代数学的“无解”情形的“变元”)。这些都应该是“代”字所包含的含义。从语言学角度可以说,说谎者悖论就是因为混淆了代词的不同含义,即混淆了“已经确定代表”和

“尚未确定代表”而产生的。

既然是“代”,既然可能尚未确定甚至可能永远不确定代表哪个对象,按说就应该像代数学那样采用变元符号“ x ”,于是说谎者悖论的代词“这个句子” L 其实应该写为 X ,那样的话,说谎者悖论就会马上显出是一个“方程”问题,一个“求解”问题,它“推出”矛盾就毫不奇怪了,只不过意味着“无解”而已。或者,如果说谎者悖论在陈述了“ $L:L$ 为假”之后紧跟着说“求这个句 L ”,说谎者悖论就会更直接地显出是一个“求解”问题,说谎者悖论也就马上不是什么令人困惑的悖论了^①。这样看来,说谎者悖论的隐蔽的语言学关键词,就是“代”和“求”。无论从“代”的角度,即 X 的角度,还是直接从“求”的角度,只要点明说谎者悖论是一个求解问题,都会豁然开朗。

当然,事实上说谎者悖论既没有采用 X 来表述,也没有点明“求这个句 L ”,而是成了千古之谜。若问为什么说谎者悖论实质上是一个求解问题,为什么可以从“代”和“求”的角度去看,为什么“句方程”方案是合理的,所有这些,根本原因就是基本问题2所指出的:说谎者推理用到了“ L 是一个值”的假设而推出矛盾,因此说谎者悖论的 L 不是一个值而是一个句变元 X ,从而说谎者悖论是一个求解问题,而且是一个无解的求解问题。

The Liar Paradox: An Algebraic Phenomenon in Linguistics

WEN Lan

(School of Mathematical Science, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: In this paper we refine the ideas of the theory of “sentence equation” on the liar paradox. The main statement is that the liar paradox is a quite purely algebraic phenomenon in linguistics. In fact, the whole theory of “sentence equation” is inspired by algebra and developed along the route of algebra, starting with the very basic concepts. The reason it can be done this way is all due to the discovery of a “three cards paradox”. The Three cards paradox is an irrefutable evidence for the link between the liar paradox and Boolean algebra, and serves as the corner stone for the theory of “sentence equations”.

Key words: liar paradox; Boolean equation; sentence variable; sentence equation

(责任校对 葛丽萍)

①文兰:《强化版说谎者悖论的一个解决方案》,《逻辑学动态与评论(第二卷第二辑)》,中国社会科学出版社2023年版,第17页。