doi:10.13582/j.cnki.1672-7835.2024.06.006

集合论悖论的哲学阐释新探

袁永锋

(中山大学 哲学系(珠海),广东 珠海 519082)

摘　要:根据 ZFC,不存在康托集和罗素集。对此,极小解释诉诸悖论或矛盾来解释。它的缺点是用外部后果来解释原因。好的解释应该诉诸这些“集合”的内在缺陷来进行内部解释。文章研究发现,实体必须具有确定性和二分性,并且这两种性质不能循环依赖于自身;如果康托集和罗素集是集合,那么它们的确定性和二分性会循环依赖于自身,故它们不是实体或集合;这种解悖方案不仅可以解决布拉里-福蒂悖论和米瑞曼诺夫悖论,而且与主流解悖方案相比具有诸多优点。

关键词:康托悖论;罗素悖论;集合宇宙;确定性;二分性

中图分类号:B81　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-7835(2024)06-0040-12

一　外部解释与内部解释

根据 ZFC 公理,康托集 V:={x |x 是集合}① 和罗素集 R:={x |x 是集合且 x ∉x} 不是集合。但是,为什么没有这样的集合呢? 极小解释认为:V 和 R 不是集合,因为假设它们是集合会导致悖论,会与 ZFC 公理相矛盾②。然而,导致矛盾或悖论并不是 V 和 R 的内在缺陷或原因,而只是它们的外在后果或结果。我们不能用这种外在后果来解释为什么 V 和 R 不是集合,因为这种解释并不能解释哪些内在缺陷致使它们不是集合。打个比方,我们不能用死亡这个结果来解释心脏骤停。为了解释心脏骤停,我们必须找到导致心脏骤停的内部原因。因此,解释的正确方向应该是:先揭示康托集 V 和罗素集 R 的内在缺陷,以此解释为什么它们不是集合,然后用它们是集合这一似是而非的预设来解释为什么会导致悖论/矛盾。因此,我们需要一个独立的、更深层次的、哲学的理由来解释为什么 V 和 R 不是集合。正如苏珊·哈克所说:“努力的方向应当是,揭示出那些被摒弃的前提或原则是一种具有某些独立的——即不依赖于其导出悖论这一点而存在的——缺陷的东西。”③袁永锋和张建军也认为,解悖的关键在于揭示这些悖论集的内在缺陷④。具体来说,我们需要回答:一个正被定义的准集合(quasi-set)要想成为集合,需要满足哪些必要条件? 康托集 V 和罗素集 R 的内在缺陷是什么? 这些内在缺陷分别违反了哪些必要条件?

ZFC 研究者采用一些公理来规定一个由所有集合构成的新论域,并论证:所有集合的形成过程形成了迭代集合体系,而且每个集合都出现在这个迭代体系中的某个阶段,然而由所有集合构成的这个新论域并不出现在任何阶段,因此这个论域不是一个集合⑤⑥⑦。哥德尔(Kurt Gödel)也有这种迭代地构造集合的思想,他认为用于构造集

收稿日期:2024-05-12

基金项目:国家社会科学基金重大项目(18ZDA031)

作者简介:袁永锋(1986—),男,广东省兴宁市人,博士,副教授,博士生导师,主要从事信念修正理论、形式认识论和悖论研究。

①这里用符号‘:=’表示定义,并用符号‘=’表示等于关系。

②Soysal Z. “Why is the Universe of Sets not a Set?”, *Synthese*, 2020, 197(2): 575-597.

③Hacck S. *Philosophy of Logics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1978, p.139.

④袁永锋,张建军:《信念修正视域下的悖论研究初探》,《逻辑学研究》2019 年第 2 期。

⑤Zermelo E. “Investigations in the Foundations of Set Theory I”, van Heijenoort J. (ed.) *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic* (1879—1931). *Massachusetts*: Harvard University Press, 1967, pp. 201-203.

⑥Enderton H B. *Elements of Set Theory*. Amsterdam: Academic Press, 1977, p.8.

⑦Kunen K. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. London: Elsevier, 2006, p.11.

合的元素必须先于所构造之集合而存在①。在这种迭代概念下,如果康托集是集合,那么它就是自属集,进而不是由给定对象迭代构造而成,所以康托集不能是集合。潜在论者也提出了类似的解释:在所有集合的形成过程中,每个阶段都可以看作是一个可能世界,每个可能世界都包含了当前已经形成的那些集合,进而潜在论的集合体系是一个由无穷多可能世界构成的模态结构,进而不存在任何包含了所有集合的可能世界,因此也就没有由所有集合构成的集合②③④⑤。然而,由所有集合构成的整体跟每个集合都是共存的,由所有非自属集构成的整体也跟每个非自属集是共存的;只要这些集合存在,这些整体必定同时存在。既然它们存在,那么“不处于这种体系中的任何阶段或可能世界”或“不是被迭代地构造的”这一特点就只是它们的外部特征,它甚至都不能算是缺陷,更不用说是内在缺陷了。我们不能用这样一种外部特征来解释为什么 V 和 R 不是集合,因为这种解释并不能解释这个外部特征如何能够导致它们不是集合这一事实。

与潜在论者相反,现实论者(如 NBG 集合论学者)认为 V 和 R 是某种完成的总体(称为 proper class),并采用规模限制原则来论证 V 和 R 因太大而无法称为集合⑥⑦⑧。然而,规模太大也只是 V 和 R 的外部特征,这种特征甚至不算是缺陷。这种集合的大基数怎么会是某种内在缺陷呢,这种规模限制或大小限制怎么会是集合概念的必要条件呢,V 和 R 的大基数如何能够导致它们不是集合这一事实呢? 此外,如果我们采用一些公理集合论来排除自属集,那么由所有集合构成的论域 V=R。因此,如果 V 和 R 是集合,那么它们的基数和内在缺陷是相同的。但它们却导致了两种不同的矛盾,即 $|V|<|V|$ 和 $(R\in R)\leftrightarrow(R\notin R)$:前者意味着康托集 V 不是自身同一的,后者意味着罗素集 R 在 R 自身这一点处的内外之间没有清晰明确的边界线。那么,我们将面临一个问题:相同的大基数或内在缺陷如何导致不同种类的矛盾? 现实论者没有为这些问题提供一个自然的、哲学的解释。这使得现实论解释具有高度特设性。

由于上述解释诉诸一些外部后果或特征来解释 V 和 R 不是集合,本文将它们称为外部解释。与此相应,本文把诉诸某些内在缺陷或原因的解释称为内部解释。在罗素类型论⑨⑩中,每个集合必须包含相同类型的元素,故 V 和 R 具有相同的内在缺陷,即包含不同类型的元素,因此它们不是集合。这种类型论解释是一种内部解释。不过,将包含不同类型的元素这一特征视为某种缺陷的观点过于特设了。此外,类型论对类型进行了反直观的区分,并且排除了数学中许多重要的概念⑪⑫⑬⑭。

本文将提出另一种内部解释。由于我们的目的是解释为什么康托集 V 和罗素集 R 不是集合,因此我们必须诉诸集合概念的必要条件来解释为什么它们不是集合。此外,V 和 R 必定不满足某些必要条件,进而存在一些内在缺陷。那么集合概念的必要条件是什么,康托集 V 和罗素集 R 的内在缺陷分别是什么呢? 答案隐藏在集合论悖论不同种类的矛盾中,而不同种类的矛盾其实已经启发我们这些悖论具有不同根源。在康托悖论中,我们推

①中国社会科学院哲学研究所逻辑研究室:《数理哲学译文集》,商务印书馆 1988 年版,第 144—145 页。

②Soysal Z. “Why is the Universe of Sets not a Set?”, *Synthese*, 2020, 197(2): 575-597.

③Linnebo Ø. “The Potential Hierarchy of Sets”, *Review of Symbolic Logic*, 2013, 6(2): 205-228.

④Linnebo Ø. “Pluralities and Sets”, *Journal of Philosophy*, 2010, 107(3): 144-164.

⑤Parsons C. “What is the Iterative Conception of Set?”, Butt R. E. and Hintikka J. (ed.) *Proceedings of the 5th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science 1975, Part I: Logic, Foundations of Mathematics, and Computability Theory.* Dordrecht: Reidel, 1977, pp. 335-367.

⑥Soysal Z. “Why is the Universe of Sets not a Set?”, *Synthese*, 2020, 197(2): 575-597.

⑦Kunen K. *Set theory: An Introduction to Independence Proofs*. London: Elsevier, 2006, p.23.

⑧Enderton H B. *Elements of Set Theory*. Amsterdam: Academic Press, 1977, pp.6-10.

⑨Russell B. *Principles of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1903, Appendix B.

⑩Russell B. “Mathematical Logic as Based on the Theory of Types”, *American Journal of Mathematics*, 1908, 30(3): 222-262.

⑪Cusmariu A. “Russell's Paradox Re-examined”, *Erkenntnis*, 1979, 14(3): 365-370.

⑫Bealer G. *Quality and Concept*. Oxford: Oxford University Press, 1983.

⑬Orilia F. “Property Theory and the Revision Theory of Definitions”, *Journal of Symbolic Logic*, 2000, 65(1): 212-246.

⑭Turner R. “A Theory of Properties”, *Journal of Symbolic Logic*, 1987, 52(2): 455-472.

导出$|V|<|\mathscr{P}(V)|\leqslant|V|$。这告诉我们$|V|\neq|V|$，也就是说$V\neq V$。在布拉里—福蒂悖论中,我们也可以推导出类似结论:令 O 为所有序数的集合,那么 O 也是序数,进而可以推导出 $O<O$ 并且 $O\neq O$。由于每个确定的或固定的(determinate/fixed)实体都必定是自身同一的,故康托集 V 和所有序数的集合 O 不是确定的或固定的实体或集合。因此,V 和 O 的定义很可能不是良定义的,进而包含某种确定性(determinateness)方面的内在缺陷。与康托悖论不同,在罗素悖论中,我们推导出$(R\in R)\leftrightarrow(R\notin R)$。这意味着罗素集 R 在 R 自身这一点处的内外之间并没有清晰的边界线,或者说非自属集概念的外延并不是集合,它在 R 是否属于它自身这一方面并不是清晰二分的。在米瑞曼诺夫悖论中,我们也可以推导出类似结论,即由所有良基的集合构成的集合$(W\in W)\leftrightarrow(W\notin W)$。然而,一个实体(如{1,2,3}等)之为实体,在它的内部和外部之间必须有一条清晰的边界线,即每个实体要么是这个实体的部分要么不是它的部分。因此,罗素集 R 不可能是一个具有清晰边界线的实体或集合。因此,罗素集 R 应该包含一个二分性(bivalence)方面的内在缺陷,它的定义不是良定义的。因此,本文将从哲学上论证:每个良定义的实体/集合都必须具有确定性和二分性;如果 V 和 O 是集合,那么它们的确定性将被它们自己瓦解;类似的,如果 R 和 W 是集合,那么它们的二分性也会被它们自己瓦解。因此,康托悖论和布拉里—福蒂悖论植根于确定性的缺陷,而罗素悖论和米瑞曼诺夫悖论植根于二分性的缺陷;我们可以采用确定性和二分性这两个自然概念来阐明集合论悖论的根源。

二　康托集与罗素集作为集合时不是实体

本节将证明:如果康托集 V 和罗素集 R 是集合,那么它们就不可能是实体①。为此,我们需要采用一些基本的逻辑真理作为前提。显然,每个实体必是自身同一的。

法则 1(同一性法则)$\forall x(x=x)$

对每一对集合,如果它们是同一的,那么它们的基数也必定是同一的。因此,每个集合的基数都必定是自身同一的。

法则 2(基数同一性法则)

(1) $\forall x\forall y((x=y)\rightarrow(|x|=|y|))$,(2) $\forall x(|x|=|x|)$。

注意,法则 1 和法则 2 的论域分别是所有实体的汇集(collection)和所有集合的汇集。根据法则 1 和法则 2,我们可以证明下面这个命题。

命题 1

(1)如果康托集 V 是集合,那么它不是实体;

(2)康托集 V 不是集合。

在数学中,就每一对实体和每个关系而言,这对实体要么具有这个关系要么没有这个关系。换句话说,让我们把一个关系看成一个集合,那么每一对实体要么是这个集合的元素要么不是。本文用“$\vee$”表示不兼容析取。故我们有:

法则 3(关系二分性法则)$\forall x\ \forall y\ \forall Rel(Rel(x,y)\vee\neg Rel(x,y))$

有人可能会反驳道:法则 3 并不普遍成立,因为存在一些模糊的关系概念。首先,对法则 3 的否定会导致逻辑矛盾。其次,虽然模糊的关系概念看起来违反了法则 3,但是这种所谓违反并不意味着法则 3 不成立,因为法则 3 的否定会导致不可接受的逻辑矛盾;相反,这种所谓违反仅仅意味着这些模糊的关系概念是有问题的。打个比方,当凶手违反某些法律时,这只意味着凶手有罪,而非这些法律不合理,因为否定这些法律会与我们关于正义的社会共识相矛盾。因此,这里合理地假设:在集合论中,每个二元关系都是一个理想的关系,即每两个实体之间要么有这种关系要么没有这种关系。现在将“$Rel(x,y)$”例示为“$x\in y$”,那么我们有:

法则 4(集合二分性法则)$\forall x\ \forall y((x\in y)\vee(x\notin y))$

这里量词“$\forall x$”和“$\forall y$”的论域都是所有实体的汇集。如果我们将变元“y”限制为集合变元,那么我们得到一个弱化的集合二分性法则。现在根据法则 3 我们有:

法则 5(禁等价法则)$\neg\exists x\ \exists y\ \exists Rel((Rel(x,y)\vee\neg Rel(x,y))\wedge(Rel(x,y)\leftrightarrow\neg Rel(x,y)))$

再将关系“$Rel(x,y)$”例示为属于关系“$x\in y$”,那么我们有:

①注意,这是一个条件句,这个条件句并不是说这两个汇集(collections)不存在。

法则 6 $\neg\exists x\ \exists y(((x\in y)\vee(x\notin y))\wedge((x\in y)\leftrightarrow(x\notin y)))$

根据法则 4 和法则 6,我们可以证明下面这个命题。

命题 2

(1)如果罗素集 R 是集合,那么它不是实体;

(2)罗素集 R 不是集合。

上述基本逻辑真理告诉我们:如果康托集 V 和罗素集 R 是集合,那么它们就不是实体。乍一看这似乎很奇怪,因为如果 V 和 R 是集合那么它们至少是实体。因此,命题 1 和命题 2 看起来像是某种奇怪的自我瓦解。那么为什么当康托集 V 和罗素集 R 是集合时却不能是实体呢? 这个原因必定与实体概念、集合概念以及 V 和 R 的定义紧密相关。下面我将揭示实体/集合之为实体/集合的必要条件来哲学地解释命题 1 和命题 2。

三　确定性、二分性和集合论悖论

康托集 V 只是将所有真正的或正规的(regular)集合放在一起,罗素集 R 也仅仅是将所有真正的或正规的非自属集放在一起而已。因此,直观而言,这两个汇集应该是(至少可被称为)集合。这种直观是如此自然且强烈,它顽固地抵抗上述基本逻辑真理和 ZFC 公理。因此,对康托悖论和罗素悖论来说,寻找错误的直观和摆脱这种顽固直观的纠缠是两回事。上述逻辑真理和 ZFC 公理只能帮助我们寻找错误的直观预设,它们并不能解释为什么 V 和 R 作为集合时不是实体/集合? 正如施达德(James Studd)所说:"为什么某些集合——在这个例子中,那些非自属集——无法构成一个集合。这不能仅仅通过诉诸逻辑真理来解释。"①我们需要一个独立的、更深层次的、哲学的理由。具体来说,我们需要从哲学角度回答下面这些问题:

(1) 实体和集合的必要条件是什么,

(2) 悖论集 V 和 R 的内在缺陷是什么,

(3) 这些内在缺陷违反了哪个必要条件?

下面我将回答这些问题,以解释上述直观预设的虚假性。这是解决康托悖论和罗素悖论的关键步骤。如果这一步失败了,那么这种解悖方案就没有自然且稳固的哲学基础,进而这种解悖方案就会具有特设性。

直观而言,要想构造一个集合(如{1,2,3}等),我们必须确保:它的每个元素都是确定的/固定的(determinate/fixed),并且每个实体要么是它的元素,要么不是它的元素。一旦这两个条件得到满足,我们认为我们构造了一个集合。下文将阐明这两个条件是集合概念的必要条件。由于 V 和 R 作为集合时不是实体,而且实体概念比集合概念更一般,因此我们需要先澄清实体概念的必要条件。在集合论中,所有实体都是汇集(collection),包括集合类型的汇集和非集合类型的汇集(如真类)。有些实体是原子实体,它们没有任何元素,如$\varnothing$。其他实体则是分子的,如$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$。由于原子实体都没有元素,因此它是一个确定的/固定的/明确的(determinate/fixed/definite)常元,它没有任何不确定的/可变的元素或部分。因此,我们可以说每个原子实体都具有确定性(determinateness)。由于每个分子实体都有元素,它是不是确定的/固定的/明确的依赖于它的所有元素是否都是确定的/固定的/明确的。如果一个正被定义的准实体具有一些不确定或可变的元素,那么它不具有确定性。以 $A:=\{1,x,3\}$ 和 $C:=\{1,2,3\}$ 为例。由于"x"是一个可变元素或部分,因此 A 不是一个确定的实体,必须被排除在数学对象之外。如果将"x"例示为自然数"2",那么我们得到一个确定的集合 C。这里从 A 到 C 我们获得一种确定性。现在考虑一个循环定义 $B:=\{1,B,3\}$。这个 B 是确定的集合吗? 由于 B 的第二个元素,即 B 自身,不是一个可变元素,故 B 不像 A 那样是不确定的;由于 B 的第二个元素也不像自然数 2 那样是一个完全确定的实体,故 B 也不像 C 那样是确定的。因此,B 似乎比 A 更具确定性,但比 C 缺少确定性。B 在确定性方面的状态看起来是居于 A 和 C 之间的中间状态。不过,要构造一个确定的实体,它的确定性不能凭空而来或无所从来,必须有最终来源。然而,B 的确定性循环地依赖于它自己。它的确定性的依赖关系是一条无穷链,而且该链中的每个节点都在永无止境地、毫无希望地等待后续节点来提供确定性,进而其确定性无所从来或者说无法扎根(cannot be grounded)。因此,B 不可能获得确定

①Studd J P. "The Iterative Conception of Set: A (bi-)modal Axiomatisation", *Journal of Philosophical Logic*, 2013, 42(5): 697-725.

性。此外,一些准实体的确定性还可能以一种无穷倒退的方式依赖于其他准实体的确定性,进而也无法被扎根,进而这些准实体也不具有确定性,例如 $B_i:=\{i+1, B_{i+1}\}$。因此,要构造一个分子实体,它的确定性必须奠基在已然具有确定性的实体之上,或者说它的元素都必须首先是确定的;否则,这个所谓的分子实体包含不确定的元素,进而不能算作实体。

因此,我们必须排除上述非良构的(ill-formed)或非良基的"实体/集合"。形式地讲,令 e 为一个实体。由于集合论中的每个实体都是一个汇集,我们可以将 e 看作一棵树。令"Tree(e)"为这棵树所有节点的集合,即 $\mathrm{Tree}(e):=\{y_n \mid \exists y_{n-1}\cdots\exists y_0(y_n\in y_{n-1}\in\cdots\in y_0=e)\}$。要想构造一个实体,Tree(e)中的每个节点都必须是确定的;否则,这个所谓的实体在某些节点上是不确定的,进而不具有确定性。换句话说,这棵树中既不能出现任何可变元素,也不能出现任何循环的或无穷倒退的确定性的依赖关系。

定义 1 一个准实体 e 具有确定性当且仅当它满足下面这些条件:

(1)$\neg\exists y_n\ \exists y_{n-1}\cdots\exists y_0(x=y_n\in y_{n-1}\in\cdots\in y_0=e)$,其中 x 是一个可变元素;

(2)不存在一个无穷下降序列 $y_1, y_2, \cdots$ 使得 $\cdots\in y_2\in y_1\in e$。

根据这个定义,容易推导出下面命题。

命题 3

(1)每个原子实体都具有确定性。

(2)一个分子实体具有确定性当且仅当它的每个元素都具有确定性。

值得注意的是,要构造一个分子实体,它的每个元素必须首先具有确定性;否则,这棵树中存在一些可变元素、或者确定性的循环依赖、或者确定性的无穷倒退依赖,进而这个准分子实体在某些节点上是不确定的,进而不能算作是实体(如$\{1,\{x\},3\}$)。根据命题 3(2),每个分子实体都必须具有确定性。

原则 1(实体确定性原则). 每个实体都具有确定性。

此外,每个实体的内部和外部之间必须有一条清晰明确的边界线。考虑任何集合,如 $D:=\{1,\{2\},3\}$。Tree(D)中的每个节点在其内部和外部之间都有一条清晰明确的边界线,即每个实体要么是该节点的元素,要么不是该节点的元素。因此,我们可以说 D 具有二分性。

定义 2 一个准实体 e 具有二分性当且仅当$\forall y(y\in\mathrm{Tree}(e)\rightarrow\forall x((x\in y)\vee(x\notin y)))$。

值得注意,要构造一个实体 e,Tree(e)中的节点都必须具有二分性;否则,这个准实体在其内部和外部之间没有清晰明确的边界线,进而不能算作是实体。因此,每个实体都必须具有二分性。

法则 7(实体二分性法则)$\forall z\ \forall y(y\in\mathrm{Tree}(z)\rightarrow\forall x((x\in y)\vee(x\notin y)))$

那么我们如何判断一个节点 e 是否具有二分性?这里有四种情况。当节点 e 是可变元素时,它的二分性是无法扎根的,进而 e 没有二分性。当节点 e 是原子实体(如$\varnothing$)时,它没有任何元素,故$\forall x((x\in e)\vee(x\notin e))$,进而它的二分性是可以扎根的,因此 e 具有二分性。当节点 e 是一个枚举定义时,如果被枚举的每个元素都具有二分性,那么 e 的二分性是可以扎根的,故 e 具有二分性。当节点 e 是一个描述定义时,它是形如 $e:=\{x\mid D(x)\wedge P(x)\}$ 的定义,其中"D(x)"表示从其中挑选实体的论域,"P(x)"表示用于挑选实体的性质(如 EN:={x | x 是自然数且 x 是偶数})。首先,由于 e 的定义从一个实体的论域中挑选出一些实体,故 e 的每个元素都是具有二分性的实体。其次,谓词"$D(x)\wedge P(x)$"通常表示这样一个性质,每个实体要么满足该性质要么不满足该性质。因此,这样一个准实体 e 看起来具有二分性。最后,既然我们使用 e 的定义来定义一个新实体,那么我们仍需检查 e 在准实体 e 自身这一点上是否具有二分性或者清晰明确的边界线,即是否$(e\in e)\vee(e\notin e)$。只有当$(e\in e)\vee(e\notin e)$成立时,e 才能最终具有二分性或在其内外之间具有清晰明确的边界线。然而,$(e\in e)\vee(e\notin e)$是否总是成立的呢?根据 e 的定义,$(e\in e)\vee(e\notin e)$是否成立进一步依赖于 e 是否要么满足"$D(x)\wedge P(x)$"这个定义条件要么不满足该条件。

(1)如果$\neg D(e)$那么 $e\notin e$,进而 e 在新定义的 e 自身这一点上具有二分性或清晰明确的边界线,进而它的二分性是可以扎根的,从而它具有二分性。例如,EN 的每个元素都具有二分性,每个实体要么是偶数要么不是偶数,并且新实体 $EN\notin EN$,因此 EN 具有二分性。

(2)如果 D(e),那么$(e\in e)\vee(e\notin e)$是否成

立依赖于 $P(e) \vee \neg P(e)$ 是否成立。如果 $P(e)$ 成立或 $\neg P(e)$ 成立,那么 e 在新定义的 e 自身这一点上具有清晰明确的边界线,进而它的二分性是可以扎根的,从而它具有二分性。考虑 $FS:=\{x \mid x$ 是集合并且 x 有穷的$\}$。首先,FS 的元素都是具有二分性的集合;其次,每个实体要么是有穷集要么不是有穷集;最后,FS 是无穷的,故 $FS \notin FS$,进而 $(FS \in FS) \vee (FS \notin FS)$,从而它的二分性是可以扎根的。故 FS 具有二分性。

(3)不过,当 $D(e)$ 成立时,$P(e) \vee \neg P(e)$ 不一定成立。$P(e) \vee \neg P(e)$ 是否成立可能进一步依赖于 $(e \in e) \vee (e \notin e)$ 是否成立,进而可能会形成二分性的循环依赖。进而,这个二分性的依赖关系是一条无穷链,而且该链中的每个节点都在永无止境地、毫无希望地等待后续节点提供二分性,进而它的二分性无所从来或者说无法扎根,从而 e 没有二分性。考虑罗素集 $R:=\{x \mid x$ 是集合且 $x \notin x\}$。如果 R 是集合,那么,根据 R 的定义,Tree(R)的根节点 R 在准实体 R 自身这一点上的二分性(即 $(R \in R) \vee (R \notin R)$)进一步依赖于 R 是否要么满足定义条件"x 是集合且 $x \notin x$"要么不满足该条件。由于 R 是集合,因此这进一步依赖于 R 是否要么满足剩余条件"$x \notin x$"要么不满足该条件,即 $(R \notin R) \vee (R \in R)$。因此,这里存在二分性的循环依赖,进而罗素集 R 在新定义的 R 自身这一点上没有清晰明确的边界线。因此,虽然 R 的每个元素都是具有二分性的集合,且每个实体要么是自属集要么不是自属集,但是罗素集 R 在新定义的 R 自身这一点上的二分性是无法得到扎根的,因此罗素集 R 没有二分性。

值得注意的是,对每个实体来说,它的确定性递归地依赖于其元素的确定性,故确定性是实体在深度方面的必要条件;与此不同,由于二分性要求在实体内外之间有一条清晰明确的边界线,故二分性是实体在宽度方面的必要条件。这两个必要条件一起确保实体在深度上是确定的,在宽度上是清晰明确的。通常情况下,我们会定义出具有确定性和二分性的实体。然而,有时我们可能会定义出一些非良构的伪实体,它们没有确定性或二分性。一些不足道的例子是 $A_1:=\{1, A_2\}$、$A_2:=\{2, A_1\}$ 和 $B_i:=\{i+1, B_{i+1}\}$。一些不平凡且有趣的例子是康托集 V 和罗素集 R(后面会讨论它们)。我们可以提出下面这个良定义性概念来拒斥那些伪实体。

定义 3 一个准实体是良定义的(well-defined)当且仅当它有确定性和二分性。

由于实体概念比集合概念更一般,故确定性和二分性也是集合概念的必要条件。因此,要构造一个良定义的实体/集合,这个准实体/集合必须具有确定性和二分性。换言之,在实体或集合的宇宙/论域里,那些没有确定性或二分性的准实体或准集合必须被禁止。因此,确定性和二分性是实体/集合论宇宙的形而上学基础。

下面我将论证:康托悖论的根源在于康托集 V 的确定性缺陷,而罗素悖论的根源在于罗素集 R 的二分性缺陷。先来考虑康托集 V。根据命题 1,如果 V 是集合,那么它就不是实体。为什么?它的内在缺陷是什么,这个内在缺陷违反了实体的哪个必要条件?根据同一性法则 1,每个实体必定是自身同一的。然而,根据康托悖论可知 $|V| \neq |V|$,再根据基数同一性法则 2 可知 $V \neq V$,即 V 不是自身同一的。这意味着康托集 V 可能是不确定的伪实体,或者说包含确定性的内在缺陷。因此,我们需要检查 V 的确定性是不是能扎根的。现在假设 V 是集合,那么它应该具有确定性。问题是:它的确定性从何而来,或如何扎根?这依赖于其每个元素的确定性。既然 V 是集合,那么 $V \in V$。因此,V 的确定性循环地依赖于它自己。因此,康托集 V 的确定性是无法扎根的,或者说无所从来。根据定义 1,康托集 V 没有确定性,因此无法成为良定义的实体。可见,如果 V 是集合,那么 $V \in V$,进而 V 的确定性将无法扎根,进而瓦解了它自己的确定性,从而不是良定义的实体。这是一种自我瓦解。这正好印证了命题 1:如果康托集 V 是集合,那么它就不是实体。总之,正是这种自我瓦解,导致 V 在作为集合时包含确定性的内在缺陷;然而,这种内在缺陷隐藏在"V 是所有集合构成的集合"这个顽固直观的背后,使得我们错误地预设 V 是集合,从而推导出 $|V| \neq |V|$ 并且 $V \neq V$ 这样的荒谬结论。

现在考虑罗素集 R。根据命题 2 可知,如果罗素集 R 是集合,那么它就不是实体。为什么?它的内在缺陷是什么,这个内在缺陷违反了实体的哪个必要条件?根据罗素悖论,我们推导出 $(R \in R) \leftrightarrow (R \notin R)$。再根据法则 6 可知,$(R \in R) \vee (R \notin R)$ 不成立。这意味着罗素集 R 在新定义的

R自身这一点处可能没有一条清晰明确的边界线,或者说它可能在准实体R自身这一点上没有二分性。因此,我们要检查一下R的二分性是否可以扎根。现在假设R是集合。那么它应该具有二分性,即$\forall y(y \in Tree(R) \rightarrow \forall x((x \in y) \vee (x \notin y)))$。由于$R \in Tree(R)$,节点R应该具有二分性,即$\forall x((x \in R) \vee (x \notin R))$。问题是:它的二分性从何而来,或如何能够扎根?既然R是集合,那么节点R是否具有二分性依赖于$(R \in R) \vee (R \notin R)$是否成立,即节点R在准实体R自身这一点上是否有清晰的边界线。只有当节点R在准实体R自身这一点上有清晰边界线时,节点R才可能具有二分性。那么$(R \in R) \vee (R \notin R)$依赖于什么呢?换句话说,节点R在R自身这个点上的二分性依赖于什么?根据R的定义,它依赖于R的定义条件的二分性,即R要么满足"(x是一个集合)$\wedge$($x \notin x$)"要么不满足该条件。由于R是集合,这个二分性进一步依赖于:R要么满足剩余条件"$x \notin x$"要么不满足该剩余条件,即$(R \notin R) \vee (R \in R)$。因此,节点R在R这个点上的二分性循环依赖于自身。换言之,要使R在R自身这个点上具有清晰明确的边界线,R必须在R这个点上首先具有清晰明确的边界线。因此,罗素集R在R自身这个点上的二分性是无法扎根的,或者是无所从来的。这意味着罗素集R在R自身这个点上没有二分性或者说没有一条清晰明确的边界线。因此,我们有$\neg((R \in R) \vee (R \notin R))$。根据定义2,罗素集R并没有二分性,进而不是良定义的实体。可见,如果罗素集R是集合,那么R在R自身这个点上的二分性将循环依赖于自身,进而无法扎根/无所从来,这会瓦解它自身的二分性,或者说在它本该有的清晰边界线上撕开一个口子,从而不是良定义的实体。这是一种自我瓦解。这正好印证了命题2:如果罗素集R是集合,那么它就不是实体。总之,正是这种自我瓦解,导致R在作为集合时包含二分性的内在缺陷。然而,这种内在缺陷隐藏在"R是所有非自属集构成的集合"这个顽固直观的背后,使我们错误地预设R是集合,这样才能根据R的定义条件推导出荒谬的结论$(R \in R) \leftrightarrow (R \notin R)$,即R在R自身这一点上并不具有清晰的边界线。

四　康托集、罗素集和它们的顽固直观

上面采用了一些逻辑真理和良定义性概念来分别阐述同一个结论:如果康托集和罗素集是集合,那么它们都不是实体。不过,有人可能会反驳说:康托集只是将所有良定义集合放在一起,而罗素集只是收集所有良定义的非自属集,因此这两个汇集肯定是集合,至少是实体;这些直观是如此顽固,并不比那些基本逻辑真理、确定性和二分性的直观观念弱。确实,这两个汇集由良定义的集合构成,进而与其构成元素同时存在,故它们至少是实体。正如昆恩(Kenneth Kunen)所说"思考这种汇集并没有什么错"①。不过,前两节并不是要论证这两个汇集不是实体,而是阐述:如果它们是集合那么它们就不是实体。至于另一个顽固直观"这两个汇集肯定是集合",下面将揭示这种顽固直观在形成过程中所犯的错误,进而阻止这种顽固直观的形成。

为了判断一个准集合e是不是集合,我们需要检查:第一,Tree(e)中的所有节点是否都是确定的(确定性);第二,Tree(e)中的所有节点的内外之间是否都具有清晰的边界线,即$\forall y(y \in Tree(e) \rightarrow \forall x((x \in y) \vee (x \notin y)))$(二分性)。只有当我们相信这个准集合具有确定性和二分性时,我们才会形成"这个准集合是集合"这样的直观。现在先考虑康托集V是集合这一直观的形成。我们通常按以下方式断定它的确定性:

(#) 由于V的每个元素都是确定的集合,故V必定具有确定性。

然而,根据上一节可知,准集合V没有确定性。因此,我们需要检查"V具有确定性"这一直观的形成过程。由于该直观是在推理(#)中形成的,因此我们需要检查推理(#)的细节。由于每个集合的确定性依赖于其元素的确定性,因此该直观的形成过程(#)可分为下面两个步骤:

(Ⅰ)令M为V的元素,以深度优先的方式检查M的确定性。如果它具有确定性,那么跳转到步骤(Ⅱ);否则,返回V不具有确定性的结论。

(Ⅱ)如果我们还没有遍历V的所有元素,那么跳转到步骤(Ⅰ)以检查另一个尚未检查的V的元素;否则,返回V具有确定性的结论。

①Kunen K. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. London: Elsevier, 2006, p.23.

上面的推理(#)似乎瞬间遍历了 V 的所有元素,进而完成了上述两个步骤,然后形成了 V 具有确定性这一直观。由于 V 只收集所有集合,故它应该也具有二分性。因此我们相信 V 是良定义的集合。然而,既然 V 是集合,那么 V ∈V。由于上述推理(#)似乎已经遍历了 V 的所有元素,故集合 V,作为 V 的元素,在步骤(I)的某次执行中应该已经被考虑了,并且被判断为具有确定性。问题是:我们如何能够在步骤(I)的这次执行中作出这个判断? 由于这个判断仍然取决于 V 的所有元素是否都具有确定性,故我们仍然需要依靠上述步骤(I)和(II)的另一次运行来作出这个判断。因此,这个深度优先的检查会进入一个没有终点的死循环,进而我们无法完成整个过程并形成上述那个直观。换句话说,这种顽固直观的形成过程无法在 V 这个奇点上得以完成。因此,上述推理(#)在执行步骤(I)时必定没有考虑 V 本身,这样才会跳到步骤(II)以形成 V 具有确定性这一直观。这正是我们在形成这个顽固直观时所犯的错误。一旦我们在执行步骤(I)时考虑到 V,那么我们就会注意到上述 V 的确定性的循环检查,进而对 V 的确定性产生怀疑,然后这个顽固但错误的直观就不会再形成。

现在考虑罗素集 R 是集合这一直观的形成。我们通常按下面方式断定它的二分性:

(∗)由于 R 仅仅收集那些非自属集,故它的内部和外部之间的边界线肯定是清晰的(clear-cut),换句话说,它必定具有二分性。

然而,根据上一节可知,准集合 R 在 R 自身这个点上并没有二分性或清晰的边界线。因此,我们需要检查"R 具有二分性"这一直观的形成过程。由于该直观是在推理(∗)中形成的,故我们需要检查推理(∗)的细节。由于 R 的二分性依赖于 R 仅仅收集那些非自属集,因此这个直观的形成过程(∗)可细分为三个步骤:

(I)令 S 为任意集合。如果 S ∉S,那么将 S 添加到 R 中,然后跳转到步骤(II);否则,将 S 添加到 $\overline{R}$(R 的补集)中,然后跳转到步骤(II)。

(II)如果我们还没有遍历所有集合,那么跳转到步骤(I)以考虑另一个尚未考虑的集合;否则,直接跳转到步骤(III)。

(III)返回 R 具有二分性的结论。

上面的推理(∗)看起来瞬间遍历了所有集合,进而完成了上述步骤(I)和(II),然后跳到步骤(III)形成了 R 具有二分性或清晰边界线这一直观。由于 R 只收集那些具有确定性的非自属集,故它应该也具有确定性。因此我们相信 R 是良定义的集合。由于上述推理(∗)似乎已经遍历了所有集合,因此在步骤(I)的某次执行中 R 应该已经被考虑(收集或丢弃)了,进而 R 在 R 自身这个点上应该具有清晰的边界线。问题是:在步骤(I)的这次执行中,我们能够将 R 添加到 R 自身中,或将 R 添加到 $\overline{R}$ 中吗? 如果我们将 R 添加到 R 中,那么 R ∈R,进而 R 不满足 R 的定义条件"x ∉x",因此我们不能错误地将 R 添加到 R 中,矛盾;如果我们将 R 添加到 $\overline{R}$ 中,那么 R ∉R,进而 R 确实满足 R 的定义条件"x ∉x",因此我们必须将 R 添加到 R 中,矛盾。因此,R 收集 R 当且仅当 R 满足"x ∉x",即 R 不收集 R。无论是否将 R 添加到 R 中,这在逻辑上都是不可能的。换句话说,该过程的步骤(I)在 R 这个奇点处是不可能执行的,因此我们无法跳转到步骤(II)和(III)来完成所有非自属集的收集。因此,上述推理(∗)在步骤(I)的任何执行中必定没有考虑 R 自身,这样才会跳到步骤(II)和(III)以形成 R 具有二分性这一直观。这正是我们在形成上述顽固直观时所犯的错误。一旦我们在步骤(I)的某次执行中考虑到(收集或丢弃)R,那么我们就会注意到步骤(I)在 R 这个奇点上是不可执行的,进而对 R 的二分性产生怀疑,然后上述顽固但错误的直观就不会再形成。

五　相关悖论和解悖方案

本节采用良定义性解悖方案来消解布拉里-福蒂悖论和米瑞曼诺夫悖论,以表明这种解悖方案的通用性,并且将这个解悖方案与三个广为人知的解悖方案相比较,以阐明这种解悖方案的诸多优点。

(一)布拉里—福蒂悖论

悖论 1(布拉里—福蒂悖论①)令 O:= {x |x

①Van Heijenoort J. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic* (1879—1931). Massachusetts: Harvard University Press, 1967, pp. 104-112.

是一个序数}。集合 O 是不是一个序数?

推导:由于 O 是所有序数的集合,故在集合 O 上存在“小于或等于”的关系,进而 O 是一个良序集,进而它也是一个序数。由于 O 是所有序数的集合,因此 $O \in O$。由于 O 是从 $\varnothing$ 开始的所有序数的序列,并且其中的每个序数(第一个序数除外)都是所有先前序数的集合,因此 O 的每个从 $\varnothing$ 开始的序数段都是一个序数,并且这个序数大于该序数段中任何序数。由于 O 也是这样一个序数段,故 O 是一个大于 O 中任何序数的序数。又由于 $O \in O$,故 $O<O$。

在这个推导中,我们预设准集合 O 是所有序数的集合,进而 O 也是序数,即 $O \in O$,进而我们可以推导出 $O<O$,从而 $O \neq O$。再根据同一性法则 1 可知 O 不是实体。因此,与康托集 V 类似,如果准集合 O 是集合,那么它就不是实体。正如昆恩(Kenneth Kunen)所说:“所有序数的集合,如果它存在,将会是一个序数,进而不能存在。”①那么为什么准集合 O 在作为集合时却不能是实体,它的内在缺陷是什么,这个内在缺陷违反了实体的哪个必要条件?与康托集 V 类似,由于准集合 O 不是自身同一的,它可能包含确定性方面的内在缺陷。因此,我们需要检查 O 的确定性是否可以扎根。假设准集合 O 是集合,那么它应该具有确定性。问题是:它的确定性从何而来,或如何扎根?这依赖于它的每个元素的确定性。由于 O 是所有序数的集合,故 O 是良序的,进而 O 是序数,即 $O \in O$。因此,准集合 O 的确定性循环地依赖于它自身。因此,准集合 O 的确定性无法扎根、无所从来。根据定义 1 可知,准集合 O 没有确定性,进而不是良定义的实体。这也是一种自我瓦解。总之,如果准集合 O 是集合,那么我们可以推导出 $O \in O$,进而 O 的确定性无法扎根,从而包含确定性的内在缺陷;然而这个内在缺陷隐藏在“O 是所有序数的集合”这个顽固直观后面,致使我们错误地预设 O 是(良定义的)集合,从而这个缺陷最终导致了荒谬的结论,即准集合 O 不是自身同一的($O \neq O$)。

(二)米瑞曼诺夫悖论

我们知道,一个集合 s 是良基的当且仅当不存在无穷序列 y_1, y_2, ……使得$\cdots\cdots \in y_2 \in y_1 \in s$。令 W 为由所有良基的集合构成的集合。那么集合 W 会导致米瑞曼诺夫悖论,这里省略它的推导过程。

悖论 2(米瑞曼诺夫悖论②)令 $W:=\{x \mid x$ 是集合且 x 是良基的$\}$。那么 $W \in W$,还是 $W \notin W$ 呢?

在米瑞曼诺夫悖论中,我们预设准集合 W 是集合,进而我们可以推导出 $(W \in W) \leftrightarrow (W \notin W)$。然后,根据禁等价法则(法则 5 和法则 6)可知 $\neg((W \in W) \vee (W \notin W))$,再根据关系二分性法则 3 可知准集合 W 不是实体。因此,与罗素集 R 类似,如果准集合 W 是集合,那么它就不是实体。那么为什么 W 在作为集合时却不是实体,它的内在缺陷是什么,这个缺陷违反了实体的哪个必要条件?由于 $\neg((W \in W) \vee (W \notin W))$,准集合 W 可能包含二分性方面的内在缺陷。因此,我们需要检查它的二分性是否可以扎根。现在假设准集合 W 是集合。那么它应该具有二分性,即 $\forall y(y \in \mathrm{Tree}(W) \rightarrow \forall x((x \in y) \vee (x \notin y)))$。由于 $W \in \mathrm{Tree}(W)$,节点 W 应该具有二分性,即 $\forall x((x \in W) \vee (x \notin W))$。问题是:这个节点的二分性从何而来,或者说是如何扎根的呢?由于 W 是集合,故节点 W 是否具有二分性依赖于 $(W \in W) \vee (W \notin W)$ 是否成立。根据 W 的定义条件“x 是良基的”可知,这个节点的二分性进一步依赖于:W 要么是良基的要么不是良基的。那么 W 是否要么是良基的要么不是良基的呢?我们不仅需要考虑 W 的所有元素(平凡点),还要考虑新定义的 W 自身(奇异点)。

(1)一方面,根据良基性概念,它依赖于所有平凡点上的二分性,即要么 W 的所有平凡元素都是良基的,要么并非如此。由于 W 收集的都是良基的集合,因此 W 在这方面的二分性是可以扎根的。

(2)另一方面,它还依赖于 W 这个新定义的奇异点上的二分性 $(W \notin W) \vee (W \in W)$,即 W 的边界线在 W 自身这一点上是清晰的。当 $(W \notin W) \vee (W \in W)$ 成立时,如果 $W \in W$,那么 W 必定不是良基的;否则,W 是良基的,因为新定义的 W

①Kunen K. *Set theory: An Introduction to Independence Proofs*. London: Elsevier, 2006, p.17.

②Mirimanoff D. “Les Antinomies De Russell et de Burali-Forti et Le Problème Fundamental de La théorie Des Ensembles”, *Enseignement Mathématique*, 1917(19): 37-52.

$\notin$W 并且 W 的所有平凡元素都是良基的;可见,在这两种情况下,W 要么是良基的要么不是良基的,进而 W 的二分性是有根的。然而,(W $\notin$W)$\vee$(W $\in$W)可能并不成立。当(W $\notin$W)$\vee$(W $\in$W)不成立时,W 并非要么良基的要么非良基的。而(W $\notin$W)$\vee$(W $\in$W)是否成立,这正是我们在这里尝试检查的内容。可见,准集合 W 在 W 自身这一点上的二分性循环依赖于它自身。因此,W 在这方面的二分性是无法扎根的。

可见,准集合 W 在 W 这一点上的二分性循环依赖于自身,因此是无法扎根的,或者说是无所从来的。这意味着,准集合 W 在 W 这一点上并没有二分性,或者说准集合 W 的边界线在 W 这一点上是不清晰的。因此,我们有$\neg$((W $\in$W)$\vee$(W $\notin$W))。根据定义 2,准集合 W 并没有二分性,进而不是良定义的实体/集合。这也是一种自我瓦解。总之,如果准集合 W 是集合,那么 W 的二分性无法扎根,进而它瓦解了它自己的二分性,或者说在它本该有的清晰边界线上撕开一个口子,从而包含着二分性的内在缺陷;然而这个内在缺陷隐藏在“W 是所有良基集的集合”这个顽固直观的后面,致使我们错误地预设 W 是(良定义的)集合,从而最终导致了荒谬的结论(W $\in$W)$\leftrightarrow$(W $\notin$W),即 W 在 W 自身这一点上没有清晰的边界线。

(三)相关解悖方案

本小节将简要比较上述良定义性解悖方案与三个主流解悖方案,以阐明这个解悖方案的诸多优点。第一,这个良定义解悖方案采用了一些逻辑真理和良定义性概念来独立论证:如果康托集 V 和罗素集 R 是集合,那么它们就不是实体。这是非常重要的,因为这两个论证可以相互印证,一起揭示了那些悖论集自我瓦解的现象。然而,罗素的类型论、ZFC 和 NBG 的解悖方案仅仅认为这些悖论集实际上不是集合。

第二,这个良定义性方案具有更自然的哲学基础,因为:(a)确定性和二分性是准实体/集合在深度和宽度方面自然的必要条件;(b)违反定义 1 和定义 2 的准实体/集合的确定性和二分性是无法扎根的,因此我们必须拒斥这种非良定义的准实体/集合。与之不同,罗素的类型论依赖于对类型的反直观区分,要求一个集合的元素必须是同一类型,但它并没有自然地解释我们为什么必须作出这种反直观区分。这使得这种方案过于特设了。ZFC 解悖方案没有解释为什么康托集 V 和罗素集 R 不是(不能被称作)集合,以及为什么素朴概括原则无法产生 V、O、R、W 这些集合。更具体地说,它没有自然地解释:集合的必要条件是什么,康托集 V 和罗素集 R 的内在缺陷是什么,这些缺陷分别违反了哪些必要条件? NBG 解悖方案认为 V 和 R 规模太大以至于不能是元素或集合,但没有解释为什么大基数会是某种内在缺陷,以及大基数如何导致 V 和 R 不是集合这一事实。

第三,这个良定义性解悖方案论证了:如果 V/O 和 R/W 是集合,那么它们分别包含确定性和二分性的内在缺陷,而且这些内在缺陷非常自然地解释了康托悖论和布拉里—福蒂悖论与罗素悖论和米瑞曼诺夫悖论中的不同种类的矛盾。前两个悖论导致了这样一种矛盾,即悖论集 V 和 O 不是自身同一的;后两个悖论则导致了另一种矛盾,即悖论集 R 和 W 分别在 R 和 W 处没有清晰明确的边界线。因此,我们可以合理地相信:这两种矛盾背后有不同根源。因此,这种良定义性解悖方案认为:这两种悖论分别植根于确定性和二分性这两个方面的内在缺陷。与之不同,类型论、ZFC 和 NBG 解悖方案并没有重视这两种不同的矛盾类型,进而没有揭示不同种类的矛盾背后不同种类的根源或缺陷。类型论认为每个集合必须包含相同类型的对象,因此 V 和 R 包含相同的缺陷,即包含不同种类的对象。但问题是:包含不同类型的对象怎么会是一种缺陷呢,而且同样的缺陷又如何会导致不同种类的矛盾呢? ZFC 解悖方案则采用分离公理来拒斥 V 和 R,但并没有指出它们的内在缺陷是什么,也没有解释为什么它们会导致不同类型的矛盾。NBG 解悖方案认为 V 和 R 太大以至于无法成为集合。但问题是:这种汇集的大基数怎么会是某种内在缺陷呢,同样的缺陷又是如何导致不同类型的矛盾呢? 此外,由于这些集合论拒斥自属集和非良基集,因此 V、R 和 W 是同一个汇集。为什么同一个汇集在作为集合时会导致不同类型的矛盾呢? 这些解悖方案并没有提供一个自然的哲学解释。

第四,这个良定义性解悖方案揭示了我们在“V 和 R 是集合”这一直观的形成过程中所犯的错误,即我们在这种直观的形成过程中并没有考虑奇点 V 的确定性和奇点 R 的二分性。这种揭

示是很重要的,因为它可以阻止这种顽固直观的纠缠。相比之下,类型论、ZFC 和 NBG 解悖方案并没有帮我们摆脱这种顽固直观的纠缠。

第五,这个良定义性解悖方案是足够狭窄的。由于那些不足道的、非良定义的准集合(如 A:={1,x,3}、B:={1,B,3})显然是病态的,它们必须被排除在集合概念之外。因此,这个良定义性解悖方案采用确定性和二分性这两个自然概念来拒斥这种病态的准集合。有趣的是,这种处理有一个自然的理论后果,即可以同时拒斥那些悖论集,如 V、R、O、W。这表明这种处理是一种顺其自然,而不是特设的解悖方案。此外,这种处理只拒斥诸如 V、R、O 和 W 这样的悖论性集合,它并不拒斥它们所对应的汇集或真类的存在性。因此,它仅仅拒斥了我们必须拒斥的东西。因此,这个良定义性解悖方案是足够狭窄的。相比之下,罗素关于类型的反直观区分把数学中许多合理且重要的概念都排除出去了。ZFC 解悖方案采用一些有争议的公理(如选择公理)来规定一个新的集合论域。它禁止"提及任何不是集合的类",恩德顿(Herbert Enderton)认为这是"不自然的,并且可能是不公平的"①。NBG 解悖方案采用大这个概念来解释为什么 V 和 R 不是元素或集合。但这种解释并不自然且令人满意,留下了一些关于大这个概念的问题没有回答:这种汇集的大基数怎么会是某种内在缺陷呢,它如何导致 V 和 R 不是集合这一事实呢?

第六,这个良定义性解悖方案对于避免诸多悖论也是足够一般的。在这种方案中,每个实体/集合都可以看作是一棵树,这棵树中的每个节点都必须是确定的或良基的(确定性),并且在其内部和外部之间具有清晰明确的边界线(二分性)。换言之,这种解悖方案只允许那些其确定性和二分性可以扎根的那些实体/集合,并且禁止所有导致非良定义性或自我瓦解的定义。在这个由良定义的实体/集合构成的宇宙中,怎么可能会隐藏着任何矛盾?因此,我们可以合理地相信,这种良定义性解悖方案对于避免悖论而言是足够一般的。我们知道,ZFC 和 NBG 解悖方案对于避免悖论来说也是足够一般的。不过,它们的一些公理(如选择公理和基础公理)比上述确定性和二分性概念更加复杂。因此,相对于 ZFC 和 NBG 方案,我们可以更自然地并且更容易地想象(envisage)这个由良定义实体/集合构成的宇宙的一致性。因此,我们应该更加确信,这个良定义性解悖方案对于避免悖论来说是足够一般的。

第七,为了避免集合论悖论,这个良定义性解悖方案只需要在素朴概括原则的基础上增加一个良定义性的限制。因此,它只是对素朴集合论的一个小修正,而不是一个全新的集合论。与之相比,罗素类型论、ZFC 和 NBG 解悖方案提出了几乎全新的集合论,因此它们的做法就好比:扔掉了一台坏电脑,然后买了一些新电脑。我不是说新电脑不好,而是说那台坏电脑仍然在那没有得到修理。因此,尽管这些集合论非常强大、成果丰富、而且很可能是一致的,但是它们并没有解决素朴集合论中的那些集合论悖论。为了解决素朴集合论中的集合论悖论,我们需要做的是修正素朴集合论(这种修正越少越小越好),而不是提出一个几乎全新的集合论。

第八,良定义性解悖方案可以自然地解释为什么由所有集合构成的汇集(用"v"表示)和由所有非自属集构成的汇集(用"r"表示)不能用于构造新的集合。如果我们用 v 来构造集合 K,那么 $K \in v \in K$,进而 K 的确定性将循环地依赖于自身,然后无法扎根,因此 K 不是集合/实体。如果我们用 r 来构造集合 K,那么 K 的确定性将依赖于 r 的确定性。现在有两种可能性:$K \in r$ 或者 $K \notin r$。如果 $K \in r$,那么 $K \in r \in K$,然后 K 的确定性将循环地依赖于自身,进而无法扎根,因此 K 不是集合/实体。如果 $K \notin r$,那么 K 不满足条件"$x \notin x$",然后 $K \in K$,进而 K 的确定性也将循环依赖于自身,然后无法扎根,因此 K 不是集合/实体。因此,v 和 r 不能用于构造新集合。这并不是因为它们太大以至于无法作为元素。而是因为当这个新定义的准集合由 v 和 r 构造时,这个准集合的良定义性将会被瓦解。与之不同,虽然 NBG 解悖方案也认为 v 和 r 不能用于构造新集合,但它的理由是不同的,即 v 和 r 等真类的规模太大以至于无法作为元素构造新的集合。然而,它没有解释为什么这些汇集的大基数会是某种内在缺陷,为什么我们不能用一些具有大基数的汇集来构造一个新集合(比如{v}或

①Enderton H B. *Elements of Set Theory*. Amsterdam: Academic Press, 1977, p.10.

{r}),以及当我们用 v 和 r 来构造新集合时,我们到底违反了集合概念的哪个必要条件。

第九,良定义性解悖方案可以揭示这样一种有趣的现象,即集合和实体概念具有描述力极限。先考虑集合概念。当我们用它来定义新集合时,这个集合概念会指称这个新定义的准集合(如康托集 V 和罗素集 R)。这种对准集合的指称可能会导致这个准集合的良定义性(确定性或二分性)的循环依赖。然后,这个准集合的良定义性是无法扎根的。这种内在缺陷最终可能会导致悖论。因此,集合概念不能用于描述这个新定义的准集合(如 V 和 R)。因此,集合概念具有描述力极限,这种极限是由良定义性所导致或孕育的。现在考虑更一般的实体概念。尽管类型论、ZFC 和 NBG 集合论都拒斥由所有集合构成的集合,但它们无法拒斥由所有集合构成的论域;因为这个论域必定与其元素共存。因此,它们预设这个由所有集合构成的论域,作为某种非集合的实体。因此,存在集合类型的实体和非集合类型的实体。现在令“Δ”表示由所有实体构成的论域或汇集。一方面,Δ这个汇集与其元素共存,因此它必定也是实体。然后,它的所有子汇集(sub-collections)都是实体,进而$|\mathscr{P}(\Delta)| \leqslant |\Delta|$。不过,根据康托定理,我们有$|\Delta| < |\mathscr{P}(\Delta)|$。因此,我们有$|\Delta| \neq |\Delta|$并且$\Delta \neq \Delta$。然后,根据同一性法则 1,$\Delta$并不是实体。因此,如果$\Delta$这个汇集是实体,那么它不是实体。另一方面,根据良定义性方案,如果Δ这个汇集是实体,那么$\Delta \in \Delta$,进而Δ的确定性循环依赖于自身,因此无法扎根,从而Δ不是实体。可见,这两个论证相互印证,共同表明这也是一种自我瓦解。因此,即使Δ存在,它也不是实体。这意味着,即使是最一般的实体概念也不能用于描述Δ这个汇集。因此,实体概念也具有这种描述力极限。这种现象表明:

(1)如果我们用集合和实体概念来分别描述 V、R、O、W 和Δ,那么它们的确定性或二分性就会被瓦解,进而它们的确定性或二分性的内在缺陷会导致一些悖论;因此,确定性和二分性这两个必要条件导致或者说孕育了集合概念和实体概念的描述力极限;

(2)上述集合论悖论之所以出现,是因为我们超出了集合概念和实体概念的描述力极限去描述那些汇集;

(3)如果我们不超过集合和实体概念的描述力极限去描述那些汇集,那么就不会出现悖论;此外,如果我们更进一步,不用任何概念来描述集合论的柏拉图宇宙及其内部实体,那么这个柏拉图宇宙的所有内部实体都如其所是地存在,并且这个柏拉图宇宙也与这些内部实体共存,因此这个柏拉图宇宙及其内部实体之间没有隐藏的悖论;因此,悖论并不出现于柏拉图宇宙这个本体之中,而只是出现在我们对这个宇宙及其内部实体的分类或归类中。相比之下,罗素类型论、ZFC 和 NBG 集合论并没有揭示这样一种有趣的现象。

A New Philosophical Explanation of Set-theoretical Paradoxes

YUAN Yongfeng

(Department of Philosophy(Zhuhai), Sun Yat-sen University, Zhuhai 519082, China)

Abstract: According to ZFC, there is no Cantor's set and Russel's set. The Minimal Explanation explains this by appealing to some paradoxes or contradictions. Its main problem is to use some external consequences or effects to explain the cause. A good explanation should be an internal explanation appealing to some internal defects of such “sets”. The research founds that each entity must have determinateness and bivalence, and they cannot depend circularly upon themselves; if Cantor's set and Russell's set are sets, then their determinateness and bivalence will depend circularly upon themselves, and thus cannot be entities or sets. This approach can also solve Burali-Forti's and Mirimanoff's Paradoxes, and has various merits comparing with the three main approaches.

Key words: Cantor's Paradox; Russell's Paradox; universe of sets; determinateness; bivalence

(责任校对　徐宁)