

doi:10.13582/j.cnki.1672-7835.2025.02.006

一种新的集合论哲学立场:实在论多宇宙观

叶发扬¹, 李娜²

(1.中共青海省委党校 马克思主义学院,青海 西宁 810001;2.南开大学 哲学院,天津 300350)

摘要:哈姆金斯基于集合论实践中的独立性现象以及力迫产生的多样化集合论模型,提出了一种与集合论单宇宙观对立的哲学立场,称为实在论多宇宙观。该哲学立场认为存在与集合论全域 V 在同一柏拉图意义上的多元宇宙。这一观点提出后招致诸多批驳与质疑,总体而言主要聚焦于多宇宙的本体论及其论证策略问题。通过对哈姆金斯著作的文本分析发现,实在论多宇宙观在某种程度上是一种结构主义实在论,抑或至少存在结构主义实在论的倾向。基于结构主义实在论视角,不仅实在论多宇宙观的本来内涵得到了根本性阐释,而且为相关质疑提供了一种回应。

关键词:多宇宙观;单宇宙观;实在论;力迫扩张

中图分类号:B81

文献标志码:A

文章编号:1672-7835(2025)02-0043-07

数学柏拉图主义是一种常见的数学哲学思想,其强调数学理论是关于一个客观的、现实的数学域的描述,数学研究的是诸如集合、函数、数字等抽象对象,这些对象是非物理的、非精神的、非因果的,它们独立于我们而存在于客观的抽象世界^①。集合论作为数学的基础,所有的数学概念都可以在集合论中定义,所有的数学对象都可以解释为具体的某个集合,所有的数学定理都可以在其中得到证明。因此,数学的本质是集合。我们关于数学的研究本质上就是关于由所有集合构成的绝对宇宙 V 的研究,这个宇宙是唯一的、绝对的、实在的。这就是数学柏拉图主义的集合论版本——集合论单宇宙观(universe view)。然而,随着集合论以及数学的发展,通过力迫等构造方法产生了越来越多的集合论模型,而且这些模型不能视作或化归为绝对宇宙 V 。因此,哈姆金斯(J. D. Hamkins)基于当前的实践事实,提出了实在论多宇宙观(multiverse view)。富其诺(S. Fuchino)给予这种哲学立场高度评价。他说:“在我看来,如果现代集合论学家希望尽可能保留柏拉图主义的数学观,那么这种多宇宙观是自然摆脱他们身份危机的唯一可行途径。”^②事实是否如此?本文旨在探究这种新柏拉图主义的基本思想、面临的质疑以及可能的回应。

一、哈姆金斯的实在论多宇宙观

为了更好地理解多宇宙观,我们首先要从对单宇宙观的简单认识开始。在集合论哲学中,单宇宙观是被学者们普遍接受的一种哲学立场。哈姆金斯将其观点描述为:“存在一个唯一绝对的背景集合概念,该概念在相应的绝对集合论宇宙和所有集合的累积宇宙中被实例化,在其中每一个集合论断言都有一个确定的真值。”^③据此不难看出,集合论单宇宙观以集合概念、集合论宇宙和集合论真理为载体,体现出绝对性和唯一性特征,即只存在唯一的集合概念、唯一的集合论宇宙、唯一的集合论语句的真值。具体而言,以目前广受认可的公理集合论ZFC为例,这个唯一的集合概念由ZFC的公理所定义;这个唯

收稿日期:2024-12-20

基金项目:国家社会科学基金重点项目(16AZD036);天津市教委社会科学重大项目(2020JWZD27)

作者简介:叶发扬(1989—),男,四川泸州人,博士,讲师,主要从事逻辑学研究。

①Balaguer M. *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 1998, pp. 3-5.

②Fuchino S. “The Set-theoretic Multiverse as a Mathematical Plenitudinous Platonism Viewpoint”, *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science*, 2012(20): 49-54.

③Hamkins J D. “The Set-theoretic Multiverse”, *The Review of Symbolic Logic*, 2012, 5(3): 416-449.

一的宇宙就是集合论全域 V ; 在 V 中任意的集合论语句都有确定的真值。然而, 事实告诉我们, 单宇宙观在独立性问题的解决以及集合论实践的解释上陷入了困境, 哈姆金斯因此提出了实在论多宇宙观。其主要观点是: “存在各种不同的集合概念, 每一个概念都在相应的集合论宇宙中实例化, 体现出不同的集合论真理。在单宇宙观的支持者所认为的其宇宙存在的同一柏拉图意义上, 每一个如此之宇宙都是独立存在的。”^① 据此观点可知, 多宇宙观显然是对单宇宙观进行的有针对性的反驳, 因为它仍然以集合概念、集合论宇宙以及集合论真理为三大载体, 深刻阐释与单宇宙观之唯一性相对立的多元性特征。

在集合概念方面, 多宇宙观认为集合概念并非唯一绝对的, 存在多样的、不同的集合概念。哈姆金斯说: “在我们的数学经验中, 经典集合概念分裂成一系列不同的并行集合概念……。”^② 当然, 不同集合概念的存在并不会让我们无所适从, 我们在任何时候都只能采取一个集合概念作为背景概念, 选取一个集合论宇宙作为当前的话语宇宙。在相应的集合概念实例化的话语宇宙中, 我们能够进入该宇宙并研究其相关的集合论性质, 完成单宇宙观所能实现的事情, 如为数学提供本体论和认识论基础。哈姆金斯还指出, 当一个问题具有集合论依赖时, 多宇宙观将辨析其使用了哪一个集合概念, 并权衡相关集合论假设的可取性^③。哈姆金斯在这里似乎提供了一个集合概念的选择标准, 其与集合论公理的“外在价值”辩护标准异曲同工, 即强调根据数学结果选择集合概念。

在集合论宇宙方面, 多宇宙观认为存在不同的集合论宇宙, 这些宇宙的存在是相对于特定集合概念的, 不同的宇宙是对不同集合概念的实例化。事实上, 这些模型或宇宙已为我们所熟知, 如可定义的内模型 $L(R)$ 和 HOD 、 V 与力迫扩张 $V[G]$ 、布尔超幂等^④。在不同的模型或宇宙中, 集合论宇宙的性质表现出强烈的相对性。例如, 多宇宙公理中的可数公理 (countability axiom) 和良基幻觉公理 (wellfoundedness mirage axiom)^⑤ 就直观地体现了可数与良基概念的相对性。具体而言, 一个可数或良基的宇宙在另一个宇宙中可能是不可数的或者非良基的。但单宇宙主义者并不接受不同宇宙的存在, 他们认为只存在绝对宇宙 V , 所有集合或集合论模型都存在于 V 之中, 并不真正存在 V 之外的力迫扩张模型。而哈姆金斯强调, 虽然我们不能证明 V -脱殊滤子及其力迫扩张的真实存在, 但可以通过力迫的自然主义解释将其视作真实存在的^⑥。基于此, 在任何情况下, 我们实质上都可以以一个模型为地基模型, 产生相应的力迫扩张模型。

在集合论真理方面, 多宇宙观认为集合论真理依赖于背景集合概念和集合论宇宙, 集合论语句的真值因宇宙而异。我们可以将哈姆金斯的集合论真理观总结为: 对某一集合论语句, 当它在多宇宙的每一个宇宙中都为真时, 其真值为真; 当它在每一个宇宙中都为假时, 其真值为假; 当它在有些宇宙中为真, 有些宇宙中为假时, 其真值具有相对确定性。在最后一种情况下, 我们不能笼统地谈论该语句的真假, 更不能由此表明该语句真值的不确定性。在多宇宙视域下, 该语句的真值仍然是确定的, 不过是相对于某一集合论宇宙而言的真值。即某一集合论语句相对于某个宇宙, 其真值取值为“真”或“假”。由此可以看出, 哈姆金斯多宇宙视域下的真理观与单宇宙观完全不同。在单宇宙视域下, 当某一集合论语句在有些宇宙中为真, 有些宇宙中为假时, 我们称该语句的真值尚未确定, 其并非最终答案。

二、实在论多宇宙观与连续统假设

“‘多宇宙’概念最初是由集合论中的独立性现象引起的。”^⑦ 解决独立性问题是在实在论多宇宙观的一个重要动机, 尤其是最为重要的连续统假设 CH 问题, 因此 CH 也就成为检验多宇宙观是否合理有效

①Hamkins J D. “The Set-theoretic Multiverse”, *The Review of Symbolic Logic*, 2012, 5(3): 416-449.

②Hamkins J D. “The Set-theoretic Multiverse”, *The Review of Symbolic Logic*, 2012, 5(3): 416-449.

③Hamkins J D. “The Set-theoretic Multiverse”, *The Review of Symbolic Logic*, 2012, 5(3): 416-449.

④Hamkins J D. “The Set-theoretic Multiverse”, *The Review of Symbolic Logic*, 2012, 5(3): 416-449.

⑤Gitman V, Hamkins J D. “A Natural Model of the Multiverse Axioms”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 2010, 51(4): 475-484.

⑥Hamkins J D. “The Set-theoretic Multiverse”, *The Review of Symbolic Logic*, 2012, 5(3): 416-449.

⑦Antos C, Friedman S D, Honzik R, et al. “Multiverse Conceptions in Set Theory”, *Synthese*, 2015, 192(8): 2463-2488.

的一个重要标准。哈姆金斯确实也赋予 CH 极大的关注,他不仅在《集合论多宇宙》^①中将其作为重要的案例进行研究,还撰写了《连续统假设的梦想解决方案是可实现的吗?》^②一文进行专门讨论。

关于 CH 主要存在内模型和力迫公理两条典型的解决路径。哥德尔(K. Gödel)首先通过内模型证明了 CH 与 ZFC 的一致性,后来科恩(P. Cohen)通过力迫公理证明了 $\neg$ CH 与 ZFC 也是一致的。也就是说,如果 ZFC 是一致的,那么 ZFC+CH 和 ZFC+ $\neg$ CH 都是一致的。由此我们可以说 CH 独立于 ZFC。正是基于这一事实,哈姆金斯将 CH 的相关解决方案称为梦想的解决方案,并声称这一解决方案已经无法实现^③。费弗曼(S. Feferman)也表达过类似的观点:“我相信连续统假设是一个固有的模糊问题,没有新公理能以令人信服的方式解决。”^④那么 CH 没有答案吗?在哈姆金斯看来,关于 CH 成功与失败的基本经验事实就是 CH 的答案^⑤。换言之,在多宇宙视域下 CH 是一个已解决的问题,不同的解决方案构成了 CH 的答案。

哈姆金斯为其主张提供了一个哲学论证。他首先阐明了什么是梦想的解决方案,其包括两个步骤。第一个步骤是提出一个明显为真的集合论原则,第二个步骤是证明由该原则可以确定 CH 的真值。前者实质上就是解决 CH 的公理,后者强调 CH 的真值的唯一确定性。他声称这种解决方案永远无法实现,因为我们似乎没有充足的理由在 CH 和 $\neg$ CH 成立的宇宙中做出选择,无论做何选择都背离了当前的集合论实践。哈姆金斯又以对称公理(axiom of symmetry)和幂集公理(powerset size axiom)为例进行了阐释与佐证。他还进一步指出,不仅梦想的解决方案无法实现,其他更复杂的解决方案也无法实现。例如,伍丁(W. H. Woodin)基于 Ω -逻辑对 $\neg$ CH 的解决,以及基于终极-L 对 CH 的解决^⑥。由此我们似乎可以得出一个更加绝对的结论:一切试图解决 CH 的方案都是不可行的。

科尔纳(P. Koellner)基于梦想解决方案中的两个步骤,实质上从两个路向对上述观点进行了批驳。第一个路向是指出根本无法找到哈姆金斯意义上的公理。一方面,哈姆金斯强调梦想解决方案中的公理与选择公理、替换公理一样具有明显的真理性,而科尔纳指出选择公理和替换公理并非明显为真^⑦。因此,梦想解决方案中的公理并不具有明显的真理性。这一点不难理解,我们知道选择公理和替换公理的直观自明性并未得到认可,其辩护诉诸的不是内在合理性,而是一种外在价值。换言之,在没有内在必然性的情况下,通过研究其“成功”来确定其真理性^⑧。尤其是选择公理,它不仅不具有内在必然性,而且还会导致违反直觉的“巴纳赫-塔斯基悖论”(Banach-Tarski paradox)。但是,如果放弃选择公理,我们将会失去一大部分数学,如良序定理、佐恩引理等本质上都依赖于选择公理。总之,选择公理在拓扑、抽象代数、超限数等数学分支中具有重要地位。鉴于这个原因,选择公理被接纳作为一条重要的集合论公理。另一方面,科尔纳指出“解决 CH 的公理情形并不像 AC 或者替换公理那样干净(clean)。其充其量更像 PD 的情形……”^⑨。

①Hamkins J D. “The Set-theoretic Multiverse”, *The Review of Symbolic Logic*, 2012, 5(3): 416-449.

②Hamkins J D. “Is the Dream Solution of the Continuum Hypothesis Attainable?”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 2015, 56(1): 135-145.

③Hamkins J D. “Is the Dream Solution of the Continuum Hypothesis Attainable?”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 2015, 56(1): 135-145.

④Feferman S. “Does Mathematics Need New Axioms?”, *The American Mathematical Monthly*, 1999, 106(2): 99-111.

⑤Hamkins J D. “Is the Dream Solution of the Continuum Hypothesis Attainable?”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 2015, 56(1): 135-145.

⑥Hamkins J D. “Is the Dream Solution of the Continuum Hypothesis Attainable?”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 2015, 56(1): 135-145; Hamkins J D. “The Set-theoretic Multiverse”, *The Review of Symbolic Logic*, 2012, 5(3): 416-449.

⑦Koellner P. “Hamkins on the Multiverse”, <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=26fb06dc48cfe92d32ddb8fd963047687b4459d>.

⑧Gödel K. “What is Cantor’s Continuum Problem?”, *The American Mathematical Monthly*, 1947, 54(9): 515-525.

⑨Koellner P. “Hamkins on the Multiverse”, <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=26fb06dc48cfe92d32ddb8fd963047687b4459d>.

第二个路向是否否定 CH 的真值的不确定性^①。在哈姆金斯看来,CH 的真值具有不确定性。但我们不能以 CH 和 $\neg$ CH 在不同宇宙中成立为依据来证明 CH 是不确定的,更不足以支持多宇宙观。科尔纳曾解释说,我们之所以能够像“开关”一样打开和关闭 CH,仅仅因为它是一个 Orey 语句,然而我们很容易构建这样的语句。而且一个理论的任何此类句子都具有如此之特征,即基于该理论的任何模型而获得这类句子及其否定的模型。他继续反问道,同为 Orey 语句,如果 CH 是不确定的,那么对于其他的 Orey 语句也不确定的结论并不能被接受^②。简言之,CH 的真值的不确定性仅仅是由其句子类型决定的,CH 的真值理应是确定的。

我们应该看到,哈姆金斯的分析确实存在问题,但是他对一个集合论公理的直观自明性要求与其他集合论学家是一致的。然而目前的事实是,关于解决 CH 等独立性问题的候选新公理在内在辩护上几乎都存在疑难。在这种情况下,我们似乎可以采取与选择公理相似的进路,即通过诉诸公理的外在价值进行辩护。对目前因解决 CH 而产生的相关集合论模型,基于模型的外在价值辩护标准,即具体以是否能够解决 CH 为标准,我们显然都必须接受 CH 和 $\neg$ CH 在其中成立的模型,因为它们都确定了 CH 的真值。根据多宇宙视域下的集合论真理观,CH 在有些宇宙中为真,有些宇宙中为假,其真值相对于特定的宇宙都具有确定性。从这个角度来看,哈姆金斯诉诸集合论实践经验对梦想解决方案的否定,实际上可以理解为一种外在价值辩护的变体。总而言之,虽然哈姆金斯的多元宇宙观并未为 CH 提供一个具体的技术性解决方案,但在多元宇宙视域下,目前的所有解决方案实质上都是成功的。哈姆金斯正是基于对当前所有解决方案的实践考察,才提出了一种合理的哲学解释,而单宇宙观对此似乎是无能为力的。

三、实在论多宇宙观的质疑

在实在论多宇宙观中,由于哈姆金斯对集合概念和集合论真理所涉细节甚少,观点也较为明晰,因此带来的困扰较少,相关责难主要聚焦于集合论宇宙的本体论问题。具体而言,主要围绕集合论的研究对象、集合论模型之间的关系以及集合论宇宙的存在等问题展开。

第一个问题是集合论的研究对象是不是模型?哈姆金斯将集合论的研究对象确定为模型,而科尔纳认为集合论的研究对象一直都是集合。“有时集合论学家关注的是作为模型的集合,如当他们询问其试图解决的问题是否独立于所使用的公理时。在其他时候,集合论学家关注一般意义上的集合,如当他们在 ZFC 中证明关于奇异基数组合学(singular cardinal combinatorics)的结果以及试图寻找解决 CH 的公理时。”^③科尔纳之所以提出这一质疑,显然是基于单宇宙立场,他曾明确宣称自己更拥护单宇宙观。在单宇宙视域下,其批驳具有一定的合理性。因为如果存在唯一的绝对宇宙 V ,而 V 是一个由所有集合组成的整体,那么无论在 V 中谈论模型抑或集合, V 中的对象实际上都只能是集合。

如果集合论的研究对象是模型,那么将产生另一个相关的问题,集合论模型之间存在何种关系?该问题被安托斯(C. Antos)等人具化为:不同的集合论模型是否可以解释为实例化不同集合概念的不同集合论宇宙?由于他们认为多元宇宙观与巴拉格尔(M. Balaguer)的充分的柏拉图主义(full-blooded platonism, FBP)密切相关,因此 FBP 的问题就是多元宇宙观存在的问题。他们通过对科利万(M. Colyvan)和扎尔塔(E. N. Zalta)对 FBP 反对意见的考察,得出“不存在完全不同的两个集合论宇宙”的结论。他们首先预设一个基本前提:如果两个模型是不同的,那么它们理应描述两个完全不同的宇宙。基于此,他们又以模型中的有限数对象为例阐明,并不存在两个完全不同的模型,因而也就不存在两个完全不同的

^①需要说明的是,梦想解决方案中 CH 的真值的确定性是一种绝对确定性。然而,根据前文我们对哈姆金斯多元宇宙视域下的真理观的理解,这里的不确定性实质上是哈姆金斯意义上的相对确定性。

^②Koellner P. “Hamkins on the Multiverse”, <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=26fb06dc48cfe92d32ddb8fd963047687b4459d>.

^③Koellner P. “Hamkins on the Multiverse”, <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=26fb06dc48cfe92d32ddb8fd963047687b4459d>.

宇宙^①。由此可知,他们提出的是一个更尖锐的问题,因为他们实际上将“不同”置于绝对的意义上进行理解。

最后一个是关于集合论宇宙的存在问题,这一问题挑战性最大、质疑也最多。有趣的是,国内外学者对这一主题的探讨呈现迥然不同的两个景象,国内学者主要致力于实在论立场的合理性研究,较少关注相关的辩护策略;而国外学者承认了多宇宙观的实在论立场,因而主要聚焦于实在论立场的辩护策略。

关于实在论立场的合理性问题,裘江杰认为,多宇宙观并不必然导致实在论立场,它可化归为某种改造后的形式主义框架,这种形式主义是本体论中立的^②。杨睿之对此进行了批判性评价与分析,指出作为数学哲学的形式主义无法实现彻底的本体论中立,而且集合论多宇宙观的相关研究成果显示出其超形式主义的价值^③。他同时还表明:“如果多宇宙观不是一种形式主义,那么它可能非常接近于传统的实在论,即唯一宇宙观。”^④当然关于形式主义的问题,哈姆金斯早已预测到这一可能的质疑,因而特别强调其多宇宙观是一种实在主义,而非形式主义。

在实在论的辩护策略方面,哈姆金斯主要诉诸类比论证和哲学解释两种方式。关于类比论证策略,无论是将集合论与算术抑或几何学进行类比,都犯了不当类比的错误。科尔纳指出集合论与复数的类比不成立^⑤,而文图里(G. Venturi)认为不能将集合论与几何学进行类比^⑥。相较而言,在哲学辩护上采取的力迫的自然主义解释问题更严重。科尔纳与安托斯等人对“一致性保证存在”的哲学主张不予接受。理解这一质疑并不困难,因为不同的哲学学派或数学哲学家所持有的哲学立场可能不同,在哈姆金斯看来合理的立场可能并不为其他数学哲学家所接受。但是,“一致性保证存在”与力迫的自然主义解释之间存在何种关系?我们有必要做一个详细的阐释。如前文所述,安托斯等人认为实在论多宇宙观与 FBP 是密切相关的。FBP 的基本观点是:“所有可能的数学对象实际上都真实存在。”^⑦这一抽象的观点经过巴拉格尔关于“可能”和“一致”的解释后,被更明晰地阐述为“所有一致的纯数学理论都真实地描述了数学领域的某些部分”^⑧。简言之,一致性保证存在。我们发现哈姆金斯的多宇宙观也蕴含这一思想。因为力迫扩张只能保证一致性,而哈姆金斯却通过力迫的自然主义解释直接表明力迫扩张是真实存在的,显然在一致性与扩张模型的存在之间缺乏必要联系。因此,该推理中隐含一个重要的预设前提,即一致性保证存在,而且该前提实质上就是由力迫的自然主义解释所提供的。因此,通过对“一致性保证存在”的否定就实现了对力迫的自然主义解释的否定。

利瓦达斯(S. Livadas)则基于自立(self-standing)视角给予了实在论多宇宙观绝对的抨击。首先,集合概念本身没有自立内容却被用来描述集合论宇宙。其次,他反对力迫扩张可以具有本体论意义上的自立存在。原因在于,“一是它(注:扩张模型)在 V 内是完全可定义的;二是在力迫的自然主义解释中,通过定义等价类的斯科特技巧(Scott trick)证明了 V 中的可定义性,而该可定义性反过来又以基础公理为条件,然而基础公理与良序的绝对性存在内在联系。”^⑨利瓦达斯似乎意在表达两个方面的意见:一方面,在哲学立场上,他明确支持集合论单宇宙观,反对多宇宙观;另一方面,在辩护策略上,无论是关于集合概念的元数学断言还是力迫的自然主义解释,都无法真正为多宇宙观提供有效辩护。

①Antos C, Friedman S D, Honzik R, et al. “Multiverse Conceptions in Set Theory”, *Synthese*, 2015, 192(8): 2463–2488.

②裘江杰:《集合论多宇宙观与形式主义》,《逻辑学研究》2020 年第 5 期。

③杨睿之:《也论形式主义与多宇宙观》,《科学·经济·社会》2021 年第 2 期。

④杨睿之:《集合论多宇宙观述评》,《自然辩证法研究》2015 年第 9 期。

⑤Koellner P. “Hamkins on the Multiverse”, <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=26fb06dc48cfe92d32ddb8fd963047687b4459d>.

⑥Venturi G. “Forcing, Multiverse and Realism”, in Bocconi F, Sereni A(eds.). *Objectivity, Realism, and Proof*. Cham: Springer, 2016, p. 235.

⑦Balaguer M. “A Platonist Epistemology”, *Synthese*, 1995, 103(3): 303–325.

⑧Balaguer M. “A Platonist Epistemology”, *Synthese*, 1995, 103(3): 303–325.

⑨Livadas S. “Abolishing Platonism in Multiverse Theories”, <https://sci-hub.se/10.1007/s10516-020-09526-3>.

四、结构主义实在论:对实在论多宇宙观质疑的回应

结构主义实在论的基本观点是,数学的研究对象是抽象结构,并且强调这些结构的实在性^①。从哈姆金斯关于多宇宙的一系列关联论文来看,其多宇宙观尽显结构主义实在论的端倪。我们尝试对此进行简要论证,并表明其对上述质疑提供了一种可能回应。

首先,结构主义实在论主张数学的本质是结构,而哈姆金斯明确将集合论的研究对象确定为模型,这里的模型实质上就是一种结构。一方面,他将多宇宙思想追溯至冯·诺依曼(J. von Neumann),而冯·诺依曼最早区分了集合和真类,并将真类作为集合论的研究对象,其中全域 V 就是典型的真类。随着力迫扩张技术的发展与应用,以全域 V 为地基模型的扩张模型爆发式产生。哈姆金斯可能已经认识到真类等结构在集合论实践中的重要地位。另一方面,哈姆金斯生活在数学结构主义兴起并主导数学发展的时代,在此背景下,在数学基础问题上,范畴论甚至被提议替代集合论作为数学的新基础。因此,哈姆金斯的数学观难免会受到这种方法论和主流数学风格的影响。他明确指出集合论表现出范畴论性质,因此展现出本质上的二阶性质^②。他还给出了诸多相关的具体论述,如“一个集合论模型就是一个ZFC公理在其中为真的数学结构”^③;以及“当群理论家研究群,环理论家研究环,拓扑学家研究拓扑空间时,集合论学家研究集合论模型”^④。我们知道,群论、环论以及拓扑学是形式数学或抽象代数的重要内容,而哈姆金斯却将集合论与之进行类比。由此可见,他将作为研究对象的集合论模型视作抽象的代数结构。巴顿(N. Barton)也曾指出,如果对多宇宙观进行本体论与指称解释会导致指称倒退困难,应该坚持代数解释^⑤。这表明,他也认为多宇宙观具有结构主义倾向。

其次,结构主义实在论的显著特征是强调数学对象之间关系的重要性,忽略其内在属性。哈姆金斯的确非常关注模型以及模型之间的关系,多宇宙观的提出就是基于当前的各种力迫扩张技术所产生的模型,这种力迫扩张关系将各个模型之间联系起来。而在多宇宙观的推动下发展起来的力迫的模式逻辑(modal logic of forcing),我们可以在其中将一个自然的克里普克模型(Kripke model)描述为“可能世界是集合论世界,可及关系是模型与其力迫扩张之间的关系”^⑥。哈姆金斯实质上将模型分成了独立模型和关联模型。独立模型就是通过元数学断言的不同集合概念所实例化的原初模型,这些模型甚至是不相容的,它们存在完全不同的对象集。关联模型则是彼此之间存在某种关系(如力迫扩张)的模型,在关联模型中,两个模型之间的对象集显然并非完全不同。例如,由ZF和ZFC这两个集合概念实例化的宇宙,根据哈姆金斯的多宇宙观,它们确实是不同的集合论宇宙。ZF描述的是不带有选择公理的宇宙,而ZFC描述的是带有选择公理的宇宙。显而易见,ZFC作为ZF的扩张,由这两个理论所满足的模型存在部分相同的对象集。此外,在结构主义实在论者看来,“不同结构位置上的同一实质上是某种约定意义上的同一,如自然数结构与实数结构中的‘1’并不是真正相同的,而只在约定意义上同一”^⑦。据此似乎就不难理解哈姆金斯关于自然数概念在不同的模型中可能不同这一激进的论点了,该论点遭到了诸多质疑,甚至有人直呼完全不清楚哈姆金斯旨在表达何种意涵。殊不知,这一论述恰是他结构主义倾向的有力证据。

最后,结构主义实在论认为抽象数学结构是客观存在的。显然,哈姆金斯对其多宇宙观的本体实在

①刘杰:《数学真理困境的结构主义实在论求解》,《科学技术哲学研究》2013年第6期。

②Hamkins J D. "The Set-theoretic Multiverse: A Natural Context for Set Theory", *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science*, 2011(19): 37-55.

③Hamkins J D. "The Set-theoretic Multiverse: A Natural Context for Set Theory", *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science*, 2011(19): 37-55.

④Hamkins J D. "The Set-theoretic Multiverse", *The Review of Symbolic Logic*, 2012, 5(3): 416-449.

⑤Barton N. "Multiversism and Concepts of Set: How Much Relativism Is Acceptable?", in Boccuni F, Sereni A (eds.). *Objectivity, Realism, and Proof*. Cham: Springer, 2016, pp. 189-209.

⑥Hamkins J D. "The Set-theoretic Multiverse: A Natural Context for Set Theory", *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science*, 2011(19): 37-55.

⑦刘杰:《数学真理困境的结构主义实在论求解》,《科学技术哲学研究》2013年第6期。

论立场非常坚定。他声称集合论多宇宙观是一种关于数学存在的本质的本体论主张,是一种关于宇宙的高阶实在主义而非形式主义,也不能通过证明化归为任何一种形式主义^①。哈姆金斯更是试图通过各种策略尽可能为多宇宙的存在性提供辩护,当然其中的某些辩护方式可能存在不当之处;尤其是力迫的自然主义解释,这种具有浓厚形而上学色彩的哲学辩护遭到了反驳。但有一点不容置疑,他旨在向我们介绍的多宇宙观在本体论上是一种实在论。

综上所述,实在论多宇宙观与结构主义实在论在某些细节方面存在不同,同时哈姆金斯也并未明确指出自己的思想属于结构主义实在论,但是它们在诸多主要方面是一致的。我们据此似乎可以推断,实在论多宇宙观在某种程度上是一种结构主义实在论,至少存在结构主义实在论的倾向。基于结构主义实在论视角,在集合论宇宙的本体论问题上,我们可以更坚定地地为哈姆金斯重申:集合论的研究对象是集合论模型;集合论模型之间由于力迫扩张等关系而并非完全不同;虽然某些论证策略有待商榷,但多宇宙观在本体论上的实在论立场是明确的。

结语

面对当前的集合论实践与独立性现象,当单宇宙观陷入困境与无力局面时,哈姆金斯的实在论多宇宙观为其提供了某种合理的解释,并为集合论的深入理解提供了一个全新的视角,推动了进一步的集合论实践。当然,实在论多宇宙观作为一种新哲学立场也饱受质疑,这些质疑主要聚焦多宇宙的本体论问题,具体涉及集合论的研究对象、集合论模型之间的关系以及集合论宇宙的存在等。基于我们对哈姆金斯相关文本的考察,发现实在论多宇宙观与结构主义实在论在诸多主要方面的一致性,我们可以将其解释为一种结构主义实在论,或者说存在结构主义实在论的倾向。在结构主义实在论视角下,实在论多宇宙观将得到根本性阐释,诸多质疑也得到了一种可能性回应。最后,集合论哲学界在多宇宙观与单宇宙观之间将做何选择,我们无法给出终极答案,这一切只能交给时间、瞩目未来。

A New Philosophical Position on Set Theory: The Realistic Multiverse View

YE Fayang¹ & LI Na²

(1. School of Marxism Studies, The Party School of Qinghai Provincial Committee of the Communist Party of China, Xining 810001, China;

2. School of Philosophy, Nankai University, Tianjin 300350, China)

Abstract: Based on the phenomenon of independence in the practice of set theory and the diverse set theory models produced by forcing, Hamkins proposed a philosophical position opposed to the universe view, which was called the realistic multiverse view. This philosophical position holds that there are diverse universes in the same Platonic sense as the set-theoretic universe V . After this viewpoint was proposed, it has attracted many criticisms and doubts. Generally speaking, it mainly focuses on the ontology of multiverse and its justification strategies. Through our analysis of Hamkins' texts, we find that the realistic multiverse view is to some extent a form of structuralist realism, or at least there is a tendency towards structuralist realism. From the perspective of structuralist realism, not only the original connotation of the realistic multiverse view will be fundamentally clarified, but also a possible response to related questions is provided.

Key words: multiverse view; universe view; realism; forcing extension

(责任校对 张伟平)

^①参见 Hamkins J D. "The Set-theoretic Multiverse", *The Review of Symbolic Logic*, 2012, 5(3): 416-449; Hamkins J D. "The Set-theoretic Multiverse: A Natural Context for Set Theory", *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science*, 2011(19): 37-55.