doi:10.13582/j.cnki.1672-7835.2025.05.006

直觉主义量化模态逻辑与巴坎公式

程华清
(安徽师范大学 文学院,安徽 芜湖 241002)

摘　要:直觉主义量化模态逻辑系统 IQS5 是否接受巴坎公式是尚未解决的问题。通过为系统构建新的克里普克语义,能够证明系统 IQS5 的弱可靠性和弱完全性,进而可用反模型的方法证明巴坎公式不是系统的内定理,即系统 IQS5 不接受巴坎公式但接受逆巴坎公式。

关键词:直觉主义逻辑;直觉主义模态逻辑;巴坎公式

中图分类号:B81　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-7835(2025)05-0044-09

巴坎公式(Barcan Formula)$\forall x\Box A\rightarrow\Box\forall xA$ 形式上显示了交换模态算子和全称量词先后顺序命题间的蕴涵关系。经典量化模态逻辑的 K、D、T 和 S4 系统都不接受巴坎公式,而 S5 系统则接受它①。形式上,直觉主义量化逻辑仅比经典量化逻辑少了“排中律”$A\vee\neg A$ 及其等价形式②。由此可提出一个值得进一步探讨的问题:直觉主义量化模态逻辑 S5 系统(简称“IQS5”)是否接受巴坎公式?本文将对此问题予以解答。

一、直觉主义量化模态逻辑系统 IQS5 及其语义

IQS5 建立在形式语言 $L^{\Box}$ 基础上,是对直觉主义量化逻辑公理系统 IQ③ 的模态扩充。形式语言 $L^{\Box}$ 由如下初始符号和公式集构成。

(一)初始符号

(1)$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$(可数个字母);均称为个体变元。

(2)$a_1, a_2, \cdots$(有限个或可数个字母);均称为个体常项。

(3)$A_1^{\ 1}, A_1^{\ 2}, \cdots, A_1^{\ n}, \cdots$(可数个字母);$A_2^{\ 1}, A_2^{\ 2}, \cdots, A_2^{\ n}, \cdots$(可数个字母);$\cdots$;$A_n^{\ 1}, A_n^{\ 2}, \cdots, A_n^{\ n}, \cdots$(可数个字母);$\cdots$;$A_i^{\ j}$(i 和 j 都是正整数)称为 i 元谓词。

(4)$\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\forall,\exists,\Box$,, ,(,);它们分别称为否定词、合取词、析取词、蕴涵词、全称量词、存在量词、必然算子、逗号、左括号和右括号。

(二)公式集

公式集由归纳定义给出,形成规则如下:

(1)对于任意的正整数 i 和 j,$A_i^{\ j}(t_1, t_2, \cdots, t_i)$都是原子公式,其中 $t_1, t_2, \cdots, t_i$ 是任意的个体变元或个体常项,个体变元和个体常项都被称为项。原子公式是公式。

(2)如果 A 是公式,那么$\neg A$ 和$\Box A$ 都是公式。

(3)如果 A 和 B 都是公式,那么$(A\wedge B)$,$(A\vee B)$和$(A\rightarrow B)$都是公式。

收稿日期:2025-03-21
基金项目:教育部人文社会科学研究青年基金项目(21YJC72040001);国家社会科学基金重大项目(20&ZD046)
作者简介:程华清(1987—),男,蒙古族,辽宁新民人,博士,讲师,主要从事现代逻辑、逻辑哲学和数学哲学研究。

①Goble L. *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*. Blackwell Publishers, 2001, p.148.

②冯棉:《经典逻辑与直觉主义逻辑》,上海人民出版社 1989 版,第 172 页。

③冯棉:《经典逻辑与直觉主义逻辑》,上海人民出版社 1989 版,第 169—170 页。

(4)如果 A 是公式,那么$\forall x_i A$ 和$\exists x_i A$ 都是公式(i 是任意正整数)。

IQS5 的语型定义延续 IQ 的相应定义。IQS5 由 21 个公理和 2 个推理规则构成。分别由 $L^{\Box}$语言下 IQ 的 17 个公理和分离规则 MP,以及模态逻辑的 4 个特征公理 K“$\Box(A\to B)\to(\Box A\to\Box B)$”、T“$\Box A\to A$”、4“$\Box A\to\Box\Box A$”和 5“$\neg\Box A\to\Box\neg\Box A$”和必然化规则 RN 构成,其中 IQ 的“概括式”公理扩展至包含 4 个特征公理。IQS5 的内定理和推演的定义参照直觉主义模态命题逻辑公理系统①的相应定义。如果 A 是 IQS5 的内定理,那么记作 $\vdash^{IQS5}A$;如果 A 是由公式集 Γ 推演得到,那么记作 $\Gamma\vdash^{IQS5}A$。

IQS5 有以下一些重要内定理和导出规则,证明从略:②

内定理[1]:$\vdash^{IQS5}A\to A$

内定理[2]:$\vdash^{IQS5}(\Box A\wedge\Box B)\to\Box(A\wedge B)$

内定理[3]:$\vdash^{IQS5}A\to\neg\neg A$

内定理[4]:$\vdash^{IQS5}(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$

导出规则[1](演绎定理):如果 $\Gamma\cup\{A\}\vdash^{IQS5}B$,那么 $\Gamma\vdash^{IQS5}A\to B$

导出规则[2](演绎定理的逆定理):如果 $\Gamma\vdash^{IQS5}A\to B$,那么 $\Gamma\cup\{A\}\vdash^{IQS5}B$

导出规则[3](三段论规则):如果 $\Gamma\vdash^{IQS5}A\to B$ 并且 $\Gamma\vdash^{IQS5}B\to C$,那么 $\Gamma\vdash^{IQS5}A\to C$

导出规则[4]:$\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}\vdash^{IQS5}(B_1\wedge B_2\wedge\cdots\wedge B_n)$

导出规则[5]:$\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}\vdash^{IQS5}A$ 当且仅当 $\vdash^{IQS5}(B_1\wedge B_2\wedge\cdots\wedge B_n)\to A$

导出规则[6]:如果 $\vdash^{IQS5}A\to B$,那么 $\vdash^{IQS5}\Box A\to\Box B$

导出规则[7]:如果 $\vdash^{IQS5}\Box(B_1\wedge B_2\wedge\cdots\wedge B_n)\to C$,那么 $\vdash^{IQS5}(\Box B_1\wedge\Box B_2\wedge\cdots\wedge\Box B_n)\to C$

对巴坎公式问题的讨论依赖于 IQS5 的语义。

直觉主义模态命题逻辑的对应理论表明:模态公理 T、4 和 D 在经典模态命题逻辑和直觉主义模态命题逻辑的关系语义框架中有相同的对应性质,但公理 5 却不是如此③。多岑曾给出直觉主义命题模态逻辑 S5 的克里普克语义(其框架被称为“HS5.1”)④,但直接把多岑的工作与直觉主义量化逻辑语义进行合并会给探讨巴坎公式问题带来技术上的难度。因此,本文为 IQS5 构建的克里普克语义建立在对 HS5.1 简化后的框架之上,而这个新框架能推出 HS5.1 框架的所有性质。

IQS5 的克里普克语义通过对 IQ 的克里普克语义⑤扩充而获得,由以下定义 1 至定义 3 构成。

定义 1(IQS5 模型):一个 IQS5 模型是一个有序五元组$\langle W, \leqslant, R, D, V\rangle$(其中$\langle W, \leqslant, R\rangle$被称为“IQS5 框架”):

1.W 是一个非空集合,其中元素被称为“结点”。

2.≤和 R 是 W 上的两个二元关系:⑥

≤满足自反性和传递性。

R 满足传递性。

≤和 R 之间满足:

性质 α:对所有 $w, v\in W$,如果 $w\leqslant v$,那么 wRv。

性质 β:对所有 $w, v\in W$,如果 wRv,那么$\exists s\in W$ 使得 $w\leqslant s$ 并且 vRs。

3.D 是一个非空集合。

4.V 是一个函数(被称为 IQS5 赋值),并满足以下条件:

对所有项 t,都有 $V(t)\in D$。

①Boži M. & Došen K. “Models for Normal Intuitionistic Modal Logics”, *Studia Logica*, 1984, 43(3): 217-245.

②这些内定理和导出规则在 IQS5 的弱完全性证明中被用到。

③Kojima K. *Semantical Study of Intuitionistic Modal Logics*, PhD Thesis, Kyoto University, 2012, p.34.

④Došen K. “Models for stronger normal intuitionistic modal logics”, *Studia Logica*, 1985, 44(1): 39-70.

⑤冯棉:《经典逻辑与直觉主义逻辑》,上海人民出版社 1989 版,第 177—185 页。

⑥$\leqslant\subseteq W\times W$, $R\subseteq W\times W$;对所有 $w, v\in W$, $w\leqslant v$ 意味着$\langle w, v\rangle\in\leqslant$,wRv 意味着$\langle w, v\rangle\in R$。

对所有 $w \in W$,都有 $V(w) \subseteq D$,并且 $V(w)$ 不是空集。

递增性(≤):对所有满足条件 $w \leqslant v$ 的 $w, v \in W$,都有 $V(w) \subseteq V(v)$。

递增性(R):对所有满足条件 wRv 的 $w, v \in W$,都有 $V(w) \subseteq V(v)$。

$D = \bigcup_{w \in W} V(w)$。

对所有 $w \in W$ 和所有 n 元($n=1, 2, 3, \cdots$)谓词 A_n^m,都有 $V(A_n^m, w) \subseteq [V(w)]^n$;对所有满足条件 $w \leqslant v$ 的 $v \in W$,都有 $V(A_n^m, w) \subseteq V(A_n^m, v)$ 成立。

定义 2(满足关系):令 $<W, \leqslant, R, D, V>$ 是一个 IQS5 模型,对所有 $w \in W$ 和所有公式 A,"IQS5 赋值 V 在 w 处满足 A"的递归定义如下(若 V 在 w 处满足 A,就记作 $V(A, w) = 1$;否则,记作 $V(A, w) = 0$):

[1]如果 A 是原子公式 $A_n^m(t_1, t_2, \cdots, t_n)$,那么

$V(A_n^m(t_1, t_2, \cdots, t_n), w) = 1$ 当且仅当 $<V(t_1), V(t_2), \cdots, V(t_n)> \in V(A_n^m, w)$。

[2]如果 A 是公式 $B \wedge C$,那么

$V(B \wedge C, w) = 1$ 当且仅当,$V(B, w) = 1$ 且 $V(C, w) = 1$。

[3]如果 A 是公式 $B \vee C$,那么

$V(B \vee C, w) = 1$ 当且仅当,$T_V(B \vee C)$①$\subseteq V(w)$ 并且,$V(B, w) = 1$ 或 $V(C, w) = 1$。

[4]如果 A 是公式 $B \rightarrow C$,那么

$V(B \rightarrow C, w) = 1$ 当且仅当,$T_V(B \rightarrow C) \subseteq V(w)$ 并且对所有满足条件 $w \leqslant v$ 的 $v \in W$,都有 $V(B, v) = 0$ 或 $V(C, v) = 1$。

[5]如果 A 是公式 $\neg B$,那么

$V(\neg B, w) = 1$ 当且仅当,$T_V(B) \subseteq V(w)$ 并且对所有满足条件 $w \leqslant v$ 的 $v \in W$,都有 $V(B, v) = 0$。

[6]如果 A 是公式 $\Box B$,那么

$V(\Box B, w) = 1$ 当且仅当,$T_V(B) \subseteq V(w)$ 并且对所有满足条件 wRv 的 $v \in W$,都有 $V(B, v) = 1$。

[7]如果 A 是公式 $\forall x_i B$,那么

$V(\forall x_i B, w) = 1$ 当且仅当对所有与 V 为"i 等值的"IQS5 赋值② V_1,对所有满足条件 $w \leqslant v$ 的 $v \in W$,当 $V_1(x_i) \in V(v)$ 时,均有 $V_1(B, v) = 1$。

[8]如果 A 是公式 $\exists x_i B$,那么

$V(\exists x_i B, w) = 1$ 当且仅当存在与 V 为"i 等值的"IQS5 赋值 V_1,$V_1(x_i) \in V(w)$,并且 $V_1(B, w) = 1$。

根据定义 2 可知:对所有 $w \in W$ 和所有公式 A,$V(A, w) = 1$ 或 $V(A, w) = 0$ 两者有且只有一个成立。此外,令 $<W, \leqslant, R, D, V>$ 是一个 IQS5 模型,通过施归纳于公式 A 不难证明:(1)对所有 $w \in W$ 和所有公式 A,如果 $V(A, w) = 1$,那么 $T_V(A) \subseteq V(w)$;(2)单调性:对所有 $w, v \in W$ 和所有公式 A 来说,如果 $w \leqslant v$ 且 $V(A, w) = 1$,那么 $V(A, v) = 1$。

定义 3(有效性):令 $<W, \leqslant, R, D, V>$ 是一个 IQS5 模型,对所有公式 A,若对所有 $w \in W$,当 $T_V(A) \subseteq V(w)$ 时,都有 $V(A, w) = 1$,则称 A 是模型 $<W, \leqslant, R, D, V>$ 有效的;若对所有 IQS5 模型 $<W, \leqslant, R, D, V>$ 都有 A 是模型 $<W, \leqslant, R, D, V>$ 有效的,那么称 A 是 IQS5 有效的。

二、IQS5 的弱可靠性和弱完全性

为探讨巴坎公式问题,以下证明 IQS5 的弱可靠性和弱完全性。

①公式 A 中的个体常项和自由个体变元称为"A 中的量项",A 中全体量项组成的集合记为 T(A),称为"A 的量项集",A 中全体量项的函数值(函数为 V)组成的集合 $T_V(A)$ 是"A 的量项的赋值集"。

②令 $<W, \leqslant, R, D, V>$ 和 $<W, \leqslant, R, D, V_1>$ 是两个 IQS5 模型,称 V 和 V_1 是"i 等值的"(i 是某一个正整数),如果它们满足以下条件:[1]对所有 $w \in W$,都有 $V(w) = V_1(w)$。[2]对所有 $w \in W$ 和所有 n 元谓词 A_n^m,都有 $V(A_n^m, w) = V_1(A_n^m, w)$。[3]如果项 $t \neq x_i$ 时,都有 $V(t) = V_1(t)$。

定理 1(弱可靠性):对任意公式 A,如果 $\vdash^{IQS5}$A,那么 A 是 IQS5 有效的。

证明:首先 IQS5 的所有公理都是 IQS5 有效的,规则 MP 和 RN 都保持 IQS5 有效性,再对证明序列长度作归纳证明即可。证明冗长、繁琐但不难,从略。

定理 2(弱完全性):对任意公式 A,如果 A 是 IQS5 有效的,那么 $\vdash^{IQS5}$A。

证明:采用 Henkin 方式的弱完全性证明方法,需补充以下定义与引理。

定义 4(形式语言扩充):

在形式语言 $L^{\square}$基础上,按照如下规则对 $L^{\square}$作可数无穷次扩充:

在形式语言 $L^{\square}$(不妨记为 $L_0^{\square}$)的初始符号集的基础上,添加可数无穷个新的个体常项 $c_1^{\ 1}$, $c_2^{\ 1}$,…, $c_m^{\ 1}$,…,形成新的初始符号集,形成规则不变,进而形成第 1 次扩充的形式语言(记为 $L_1^{\square}$)。

如果 $L_n^{\square}$是第 n 次扩充形成的形式语言,那么在 $L_n^{\square}$的初始符号集的基础上添加可数无穷个新的个体常项 $c_1^{\ n+1}$, $c_2^{\ n+1}$,…, $c_m^{\ n+1}$,…,形成规则不变,进而形成第 n+1 次扩充的形式语言(记为 $L_{n+1}^{\square}$)。

对定义 4 的说明:

令 F_0, F_1,…, F_n,…, F_w 分别是 $L_0^{\square}$, $L_1^{\square}$,…, $L_n^{\square}$,…, $L_w^{\square}$中全体公式的集合,其中 $L_w^{\square}$是可数无穷序列 $L_0^{\square}$, $L_1^{\square}$,…, $L_n^{\square}$,…的无穷并集,那么由定义 4 可以得到 $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n \subseteq \cdots \subseteq F_w$。

在形式语言 $L_t^{\square}$(t 是一非负整数或 t 是 w)的基础上,再添加系统 IQS5 同形式的公理和推理规则(即公理和推演规则中 $L^{\square}$的公式全部替换为 $L_t^{\square}$的公式)就形成了公理系统 IQS5(t),IQS5 系统也被记为 IQS5(0),IQS5(t)中的推演与证明的定义也作相应的改变,这样容易得到:令 T_t 是系统 IQS5(t)的内定理集,那么 $T_0 \subseteq T_1 \subseteq \cdots \subseteq T_n \subseteq \cdots \subseteq T_w$,并且系统 IQS5(t)保持弱可靠性。

定义 5(相容集):令 Γ 是 $L_t^{\square}$(t 是任一非负整数或 w)中的公式集,如果不存在 $L_t^{\square}$的公式 A,使得 $\Gamma \vdash^{IQS5(t)}$A并且 $\Gamma \vdash^{IQS5(t)} \neg$A 同时成立,那么称 Γ 是系统 IQS5(t)的一个相容集。

容易证明:Γ 是系统 IQS5(t)(t 是一非负整数或 t 是 w)的一个相容集当且仅当存在 $L_t^{\square}$中的公式 A,使得 $\Gamma \vdash^{IQS5(t)}$A 不成立。

定义 6(强相容集):令 Γ 是 $L_n^{\square}$(n 是任一非负整数)中的公式集,A、B 和 B(x_i)是 $L_n^{\square}$中的公式,x_i 在 B(x_i)中有自由出现。如果 Γ 满足以下的四个条件,那么称 Γ 是系统 IQS5(n)的一个强相容集:

①Γ 是 IQS5(n)的相容集。

②演绎封闭条件:对任意 $L_n^{\square}$中的公式 A,如果 $\Gamma \vdash^{IQS5(n)}$A,那么 A $\in$Γ。

③析取条件:对任意 $L_n^{\square}$中的公式 A 和 B,如果(A $\vee$B)$\in$Γ,则 A $\in$Γ 或 B $\in$Γ 成立。

④存在条件:对任意 $L_n^{\square}$中形式为$\exists x_i$B(x_i)的公式(x_i 在 B(x_i)中有自由的出现),如果$\exists x_i$B(x_i)$\in$Γ,那么存在 $L_n^{\square}$中的个体常元(记为 $b_j^{\ n}$),使得 B($b_j^{\ n}$)$\in$Γ,其中 B($b_j^{\ n}$)是用 $b_j^{\ n}$ 取代 B(x_i)中 x_i 的每一次自由出现而获得的公式。

引理 1(强相容集存在引理):令 Γ 和 A 分别是 $L_n^{\square}$(n 是任一非负整数)的公式集和公式,并且 $\Gamma \vdash^{IQS5(n)}$A 不成立,那么存在系统 IQS5(n+1)的一个强相容集 Σ,满足 $\Gamma \subseteq \Sigma$ 并且 $\Sigma \vdash^{IQS5(n+1)}$A 不成立。

证明:使用 Lindenbaum 方式的构造①。

引理 2(典范模型构造):令 Σ_1 是 IQS5(1)的一个强相容集,则存在一个 IQS5(w)模型<W, ≤, R, D, V>,它满足以下条件:

①W = {Σ |$\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ 并且存在非负整数 n,使得 Σ 是 IQS5(n)的一个强相容集}。

②对所有 Σ $\in$W,若 Σ 是系统 IQS5(n)(n 是某一非负整数)的强相容集,则对 $L_n^{\square}$中所有公式 A,都有:V(A, Σ)= 1 当且仅当 A $\in$Σ。

证明:构造一个 IQS5(w)模型<W, ≤, R, D, V>如下:

(1)令 W = {Σ |$\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ 并且存在非负整数 n,使得 Σ 是 IQS5(n)的一个强相容集},由于 $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_1$,因

①冯棉:《经典逻辑与直觉主义逻辑》,上海人民出版社 1989 版,第 200 页。

此 W 非空。

(2)令≤是 W 中元素的包含关系⊆,因此它具有自反性和传递性。

(3)R 是 W 中元素的二元关系,被定义为:

对于任意的 $\Sigma, \Gamma \in W$,$\Sigma R \Gamma$ 当且仅当 $\Sigma^* \subseteq \Gamma$,其中 $\Sigma^* = \{A \mid \Box A \in \Sigma\}$。

R 满足传递性,证明如下:

传递性:对所有 $\Gamma, \Sigma, \Phi \in W$($\Gamma$、$\Sigma$ 和 Φ 分别是系统 IQS5(m)、IQS5(n)和 IQS5(t)的强相容集),假设 $\Gamma R \Sigma$ 并且 $\Sigma R \Phi$,那么 $\Gamma^* \subseteq \Sigma$ 并且 $\Sigma^* \subseteq \Phi$。首先$(\Gamma^*)^* \subseteq \Sigma^*$成立:

对所有 $A \in (\Gamma^*)^*$,$\Box A \in \Gamma^*$成立。由于 $\Gamma^* \subseteq \Sigma$,因此$\Box A \in \Sigma$,即 $A \in \Sigma^*$。所以$(\Gamma^*)^* \subseteq \Sigma^*$成立。

由$(\Gamma^*)^* \subseteq \Sigma^*$和 $\Sigma^* \subseteq \Phi$ 可得$(\Gamma^*)^* \subseteq \Phi$。接下来,$\Gamma^* \subseteq (\Gamma^*)^*$成立:

对所有 $A \in \Gamma^*$,$\Box A \in \Gamma$,因此 $\Gamma \vdash^{IQS5(m)} \Box A$。由于 $\Gamma \vdash^{IQS5(m)} \Box A \to \Box\Box A$(公理 4),因此由规则 MP 可得 $\Gamma \vdash^{IQS5(m)} \Box\Box A$。再由 Γ 的演绎封闭性条件可得$\Box\Box A \in \Gamma$,因此$\Box A \in \Gamma^*$,进而 $A \in (\Gamma^*)^*$ 成立。所以 $\Gamma^* \subseteq (\Gamma^*)^*$ 成立。

由 $\Gamma^* \subseteq (\Gamma^*)^*$ 和$(\Gamma^*)^* \subseteq \Phi$ 可得 $\Gamma^* \subseteq \Phi$,即 $\Gamma R \Phi$。因此 R 满足传递性。

≤和 R 还满足性质 α 和性质 β,证明如下:

性质 α:对所有 $\Gamma, \Sigma \in W$,其中 Γ 是系统 IQS5(m)的强相容集,Σ 是系统 IQS5(n)的强相容集。假设 $\Gamma \leq \Sigma$,那么 $\Gamma \subseteq \Sigma$。对所有 $A \in \Gamma^*$,$\Box A \in \Gamma$,进而 $\Gamma \vdash^{IQS5(m)} \Box A$。由于 $\Gamma \vdash^{IQS5(m)} \Box A \to A$(公理 T),利用规则 MP 可得 $\Gamma \vdash^{IQS5(m)} A$,进而 $A \in \Gamma$(Γ 的演绎封闭条件)。由于 $\Gamma \subseteq \Sigma$,因此 $A \in \Sigma$,所以 $\Gamma^* \subseteq \Sigma$ 成立,即 $\Gamma R \Sigma$ 成立。因此性质 α 成立。

性质 β:对所有 $\Gamma, \Sigma \in W$,其中 Γ 是系统 IQS5(m)的强相容集,Σ 是系统 IQS5(n)的强相容集(这里不妨设 m 不大于 n,n 不大于 m 情况的证明类似)。假设 $\Gamma R \Sigma$,根据定义,$\Gamma^* \subseteq \Sigma$。令 $\Phi = \Gamma \cup \Sigma^*$($\Gamma \subseteq \Phi$ 和 $\Sigma^* \subseteq \Phi$ 显然成立)。

首先证明以下结论:

Φ 是系统 IQS5(n)的相容集:

假设 Φ 不是系统 IQS5(n)的相容集,那么存在 IQS5(n)的公式 A,使得 $\Gamma \cup \Sigma^* \vdash^{IQS5(n)} A$ 并且 $\Gamma \cup \Sigma^* \vdash^{IQS5(n)} \neg A$ 同时成立,进而 $\Gamma \cup \Sigma^* \vdash^{IQS5(n)} \neg(A \to A)$(利用公理$\neg A \to (A \to B)$和规则 MP)。

接下来,先证明 Γ 和 Σ^* 都是系统 IQS5(n)的相容集:

1.若 Γ 不是系统 IQS5(n)的相容集,那么存在 IQS5(n)的公式 A_0,使得 $\Gamma \vdash^{IQS5(n)} A_0$ 并且 $\Gamma \vdash^{IQS5(n)} \neg A_0$ 同时成立,进而 $\Gamma \vdash^{IQS5(n)} \neg(A_0 \to A_0)$(利用公理$\neg A \to (A \to B)$和规则 MP)。由于$(A_0 \to A_0)$是 IQS5(n)的内定理,因此推演序列中一定存在 $L_1, L_2, \cdots, L_s \in \Gamma$,进而:

$\vdash^{IQS5(n)} (L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_s) \to \neg(A_0 \to A_0)$,导出规则[5]

令 $G = (L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_s)$,那么 $\vdash^{IQS5(n)} G \to \neg(A_0 \to A_0)$。

由于$\{L_1, L_2, \cdots, L_s\} \vdash^{IQS5(n)} (A \to A)$成立(内定理[1]),因此 $\vdash^{IQS5(n)} G \to (A_0 \to A_0)$也成立(导出规则[5]),进而 $\vdash^{IQS5(n)} \neg G$(利用公理$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$和规则 MP)。再利用规则 RN 可得 $\vdash^{IQS5(n)} \Box\neg G$,因此 $\Sigma \vdash^{IQS5(n)} \Box\neg G$。根据 Σ 是系统 IQS5(n)的强相容集可知,$\Box\neg G \in \Sigma$,从而$\neg\Box\neg G \notin \Sigma$(否则 Σ 不相容)。由于 $\Gamma^* \subseteq \Sigma$,因此$\neg\Box\neg G \notin \Gamma^*$,进而$\Box\neg\Box\neg G \notin \Gamma$。由于 $\Gamma \vdash^{IQS5(m)} \neg\Box\neg G \to \Box\neg\Box\neg G$(公理 5),因此$\neg\Box\neg G \notin \Gamma$(否则将导致$\Box\neg\Box\neg G \in \Gamma$)。

进而:

1. $\vdash^{IQS5(m)} G \to \neg\neg G$,系统内定理[3]
2. $\vdash^{IQS5(m)} \Box\neg G \to \neg G$,公理 T
3. $\vdash^{IQS5(m)} (\Box\neg G \to \neg G) \to (\neg\neg G \to \neg\Box\neg G)$,系统内定理[4]
4. $\vdash^{IQS5(m)} \neg\neg G \to \neg\Box\neg G$,2 和 3 利用规则 MP
5. $\vdash^{IQS5(m)} G \to \neg\Box\neg G$,1 和 4 利用三段论规则

由于 $\Gamma \vdash^{IQS5(m)} G(L_1, L_2, \cdots, L_s \in \Gamma$,导出规则[4]),因此对 5 再利用规则 MP 可得 $\Gamma \vdash^{IQS5(m)} \neg\Box\neg G$,进而由 Γ 是系统 IQS5(m)的强相容集可知$\neg\Box\neg G \in \Gamma$,这与$\neg\Box\neg G \notin \Gamma$ 矛盾,因此假设不成立,所以 Γ 是系统 IQS5(n)的相容集。

2.若 Σ^* 不是系统 IQS5(n)的相容集,则存在 IQS5(n)的公式 B,使得 $\Sigma^* \vdash^{IQS5(n)} \neg(B \to B)$,由于$(B \to B)$是 IQS5(n)的内定理,因此推演序列中一定存在 $B_1, B_2, \cdots, B_s \in \Sigma^*$,进而:

1. $\vdash^{IQS5(n)} (B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_s) \to \neg(B \to B)$,导出规则[5]
2. $\vdash^{IQS5(n)} \Box(B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_s) \to \Box\neg(B \to B)$,导出规则[6]
3. $\vdash^{IQS5(n)} (\Box B_1 \wedge \Box B_2 \wedge \cdots \wedge \Box B_s) \to \Box\neg(B \to B)$,导出规则[7]
4. $\{\Box B_1, \Box B_2, \cdots, \Box B_s\} \vdash^{IQS5(n)} \Box\neg(B \to B)$,导出规则[5]
5. $\{\Box B_1, \Box B_2, \cdots, \Box B_s\} \vdash^{IQS5(n)} \neg(B \to B)$,利用公理 T 和规则 MP
6. $\{\Box B_1, \Box B_2, \cdots, \Box B_s\} \vdash^{IQS5(n)} (B \to B)$,系统内定理[1]

由于 $B_1, B_2, \cdots, B_s \in \Sigma^*$,因此$\Box B_1, \Box B_2, \cdots, \Box B_s \in \Sigma$,这导致 Σ 不是系统 IQS5(n)的相容集,矛盾。所以 Σ^* 是系统 IQS5(n)的相容集。

下面证明 $\Gamma \cup \Sigma^*$ 是系统 IQS5(n)的相容集:由$(A \to A)$是系统 IQS5(n)的内定理以及 Γ 和 Σ^* 都是系统 IQS5(n)的相容集可知,$\Gamma \cup \Sigma^* \vdash^{IQS5(n)} \neg(A \to A)$的推演序列中一定存在 $C_1, C_2, \cdots, C_p \in \Gamma$ 和 $D_1, D_2, \cdots, D_q \in \Sigma^*$。进而$\{C_1, C_2, \cdots, C_p, D_1, D_2, \cdots, D_q\} \vdash^{IQS5(n)} \neg(A \to A)$。令 $E = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_p$,那么根据导出规则[5]可得:

$\vdash^{IQS5(n)} E \wedge D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_q \to \neg(A \to A)$,

再根据导出规则[5]和演绎定理可得:

$\{D_1, D_2, \cdots, D_q\} \vdash^{IQS5(n)} E \to \neg(A \to A)$。

由于$\{D_1, D_2, \cdots, D_q\} \cup \{E\} \vdash^{IQS5(n)} (A \to A)$,因此根据演绎定理可得:

$\{D_1, D_2, \cdots, D_q\} \vdash^{IQS5(n)} E \to (A \to A)$,

再利用公理$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$和规则 MP 可得$\{D_1, D_2, \cdots, D_q\} \vdash^{IQS5(n)} \neg E$。进而:

1. $\vdash^{IQS5(n)} (D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_q) \to \neg E$,导出规则[5]
2. $\vdash^{IQS5(n)} \Box(D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_q) \to \Box\neg E$,导出规则[6]
3. $\vdash^{IQS5(n)} (\Box D_1 \wedge \Box D_2 \wedge \cdots \wedge \Box D_q) \to \Box\neg E$,导出规则[7]
4. $\{\Box D_1, \Box D_2, \cdots, \Box D_q\} \vdash^{IQS5(n)} \Box\neg E$,导出规则[5]

由于 $D_1, D_2, \cdots, D_q \in \Sigma^*$,因此$\Box D_1, \Box D_2, \cdots, \Box D_q \in \Sigma$,所以 $\Sigma \vdash^{IQS5(n)} \Box\neg E$。因为 Σ 是系统 IQS5(n)的强相容集,因此$\neg\Box\neg E \notin \Sigma$(否则 Σ 不相容)。由于 $\Gamma^* \subseteq \Sigma$,因此$\neg\Box\neg E \notin \Gamma^*$,进而$\Box\neg\Box\neg E \notin \Gamma$。由于 Γ 是系统 IQS5(m)的强相容集并且 $\Gamma \vdash^{IQS5(m)} \neg\Box\neg E \to \Box\neg\Box\neg E$(公理 5),因此$\neg\Box\neg E \notin \Gamma$(否则导致$\Box\neg\Box\neg E \in \Gamma$)。

再有:

1. $\vdash^{IQS5(m)} E \to \neg\neg E$,系统内定理[3]
2. $\vdash^{IQS5(m)} \Box\neg E \to \neg E$,公理 T
3. $\vdash^{IQS5(m)} (\Box\neg E \to \neg E) \to (\neg\neg E \to \neg\Box\neg E)$,系统内定理[4]
4. $\vdash^{IQS5(m)} \neg\neg E \to \neg\Box\neg E$,2 和 3 利用规则 MP
5. $\vdash^{IQS5(m)} E \to \neg\Box\neg E$,1 和 4 利用三段论规则

由于 $\Gamma \vdash^{IQS5(m)} E(C_1, C_2, \cdots, C_p \in \Gamma$,导出规则[4]),因此利用规则 MP 可得 $\Gamma \vdash^{IQS5(m)} \neg\Box\neg E$,进而由 Γ 是系统 IQS5(m)的强相容集可知$\neg\Box\neg E \in \Gamma$,这与$\neg\Box\neg E \notin \Gamma$ 矛盾,因此假设不成立,所以 $\Phi = \Gamma \cup \Sigma^*$ 是系统 IQS5(n)的相容集。

由此根据引理 1 可知,存在系统 IQS5(n+1)的一个强相容集 Φ_1,满足 $\Phi \subseteq \Phi_1$。由于 $\Gamma \subseteq \Phi$ 和 $\Sigma^* \subseteq \Phi$ 都成立,因此 $\Gamma \subseteq \Phi_1$ 和 $\Sigma^* \subseteq \Phi_1$ 都成立。由此可知,性质 β 成立。

(4)令 D 为 $L_w{}^{\square}$中的全体个体常元组成的集合(D 中有可数无穷个元素)。

(5)赋值 V 定义如下:

对所有个体变元 x_i,都有 $V(x_i)\in D$;并且对所有 $d\in D$,都存在 x_i,使得 $V(x_i)=d$(D 中元素有可数无穷个,个体变元有可数无穷个,因此对应关系存在)。

对所有 $d\in D$,都有 $V(d)=d\in D$。

对所有 $\Sigma\in W$,都有 $V(\Sigma)=D$。

对所有 $\Sigma\in W$ 和所有 n 元($n=1, 2, 3,\cdots$)谓词 $A_n{}^m$,都有

$V(A_n{}^m,\Sigma)=\{<V(t_1), V(t_2),\cdots, V(t_n)>: A_n{}^m(t_1, t_2,\cdots, t_n)\in\Sigma\}$($t_1, t_2,\cdots, t_n$ 是 $L_w{}^{\square}$中的项)。

不难验证,V 满足定义 1 中的 4 的所有条件。

所构造的 IQS5(w)模型已满足条件①,下面证明它也满足条件②:

施归纳于 $L_n{}^{\square}$中的公式 A(对于每一个 $\Sigma\in W$,Σ 是系统 IQS5(n)(n 是某一非负整数)的强相容集)。

当 A 分别是原子公式 $A_n{}^m(t_1, t_2,\cdots, t_n)$、公式 $B\wedge C$、公式 $B\vee C$、公式 $B\rightarrow C$、公式$\neg B$、公式$\forall x_i B$ 和公式$\exists x_i B$ 时,证明参照直觉主义量化逻辑中的情况①。以下仅考虑 A 是公式□B 的情况:

当 A 是公式□B 时:

1.假设$\square B\in\Sigma$,那么 $B\in\Sigma^*$。进而对所有满足 $\Sigma^*\subseteq\Sigma'$ 的 $\Sigma'\in W$(Σ'是系统 IQS5(m)的强相容集,m 是某一非负整数),都有 $B\in\Sigma'$。再根据归纳假设可知 $V(B, \Sigma')=1$。由于 $T_V(B)\subseteq D$ 也成立,因此由定义 2[6]可得 $V(\square B, \Sigma)=1$。

2.假设 $V(\square B, \Sigma)=1$。根据定义 2[6],$T_V(B)\subseteq D$ 并且对所有满足 $\Sigma^*\subseteq\Sigma'$ 的 $\Sigma'\in W$(Σ'是系统 IQS5(m)的强相容集,m 是某一非负整数),都有 $V(B, \Sigma')=1$;再根据归纳假设可知 $B\in\Sigma'$,进而 $\Sigma'\vdash^{IQS5(m)}B$ 成立。

再假设$\square B\notin\Sigma$。

接下来先证明 $\Sigma^*\vdash^{IQS5(n)}B$ 不成立:

假设 $\Sigma^*\vdash^{IQS5(n)}B$ 成立。那么 $\Sigma^*\vdash^{IQS5(n)}B$ 的推演序列中一定存在 $E_1, E_2,\cdots, E_q\in\Sigma^*$(否则,$\vdash^{IQS5(n)}B$ 成立,进而利用规则 RN 可得 $\vdash^{IQS5(n)}\square B$ 也成立,进而 $\Sigma\vdash^{IQS5(n)}\square B$ 成立。由于 Σ 是系统 IQS5(n)的强相容集,因此根据演绎封闭条件可知$\square B\in\Sigma$,这与$\square B\notin\Sigma$ 矛盾。)

进而:

$\{E_1,E_2,\cdots,E_q\}\vdash^{IQS5(n)}B$

$\vdash^{IQS5(n)}(E_1\wedge E_2\wedge\cdots\wedge E_q)\rightarrow B$,导出规则[5]

$\vdash^{IQS5(n)}\square(E_1\wedge E_2\wedge\cdots\wedge E_q)\rightarrow\square B$,导出规则[6]

$\vdash^{IQS5(n)}(\square E_1\wedge\square E_2\wedge\cdots\wedge\square E_q)\rightarrow\square B$,导出规则[7]

$\{\square E_1, \square E_2,\cdots, \square E_q\}\vdash^{IQS5(n)}\square B$,导出规则[5]

由于 $E_1, E_2,\cdots, E_q\in\Sigma^*$,因此$\square E_1, \square E_2,\cdots, \square E_q\in\Sigma$,进而 $\Sigma\vdash^{IQS5(n)}\square B$。由于 Σ 是系统 IQS5(n)的强相容集,因此根据演绎封闭条件可知$\square B\in\Sigma$,这与$\square B\notin\Sigma$ 矛盾。因此假设不成立,进而 $\Sigma^*\vdash^{IQS5(n)}B$ 不成立。

再根据引理 1 可得,存在系统 IQS5(n+1)的一个强相容集 Γ,满足 $\Sigma^*\subseteq\Gamma$ 并且 $\Gamma\vdash^{IQS5(n+1)}B$ 不成立。这与 $\Sigma'\vdash^{IQS5(m)}B$ 成立矛盾(n+1 代入 m,Γ 代入 Σ')。所以假设不成立,进而$\square B\in\Sigma$ 成立。

上述所构造的 IQS5(w)模型$<W, \leqslant, R, D, V>$满足引理 2 的两个条件。

依赖于引理 1 和引理 2,直觉主义量化逻辑弱完全性证明中的方法②可直接推广至证明 IQS5 的弱完全性,细节从略。

①冯棉:《经典逻辑与直觉主义逻辑》,上海人民出版社 1989 版,第 203—206 页。

②冯棉:《经典逻辑与直觉主义逻辑》,上海人民出版社 1989 版,第 206—209 页。

三、IQS5 不接受巴坎公式但接受逆巴坎公式

利用 IQS5 的弱可靠性和弱完全性能够证明 IQS5 不接受巴坎公式而接受逆巴坎公式。

对巴坎公式的特例$\forall x_1\Box A_1^1(x_1)\rightarrow\Box\forall x_1A_1^1(x_1)$构造 IQS5 反模型<W, ≤, R, D, V>:

首先构造 IQS5 框架<W, ≤, R>如下:

W={w, v, u, s}。

≤={<w, w>, <v, v>, <u, u>, <s, s>, <w, v>, <v, s>, <w, s>, <u, s>}。

R={<w, w>, <v, v>, <u, u>, <s, s>, <w, v>, <v, s>, <w, s>, <u, s>, <w, u>, <v, u>}。

关系≤和 R 可分别通过图 1 和图 2 直观表达,其中箭头指向表示结点有序对的顺序(图中节点自身指向自身的箭头略去)。

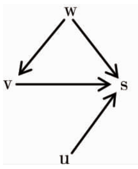

图 1　关系≤的图示

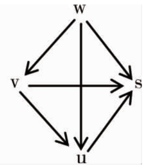

图 2　关系 R 的图示

不难验证:≤满足自反性和传递性;R 满足传递性;≤和 R 还满足性质 α 和性质 β。

基于上述 IQS5 框架再构造如下 IQS5 模型<W, ≤, R, D, V>:

D={a, b, c}。

对所有项 t,V(t)=a(自然 $V(x_1)=a$)。

V(w)=V(v)={a};V(u)=V(s)={a, b, c}。

$V(A_1^1, w)=V(A_1^1, v)=\{a\}$,$V(A_1^1, u)=\{a, c\}$,$V(A_1^1, s)=\{a, b, c\}$;对所有 $x\in W$ 和除了 A_1^1 以外的所有 n 元谓词 A_n^m,$V(A_n^m, x)=[V(x)]^n$。

易见这一 IQS5 模型满足定义 1 中的 3 和 4 的各项要求。

基于上述构造的 IQS5 模型<W, ≤, R, D, V>即可证明 $V(\forall x_1\Box A_1^1(x_1)\rightarrow\Box\forall x_1A_1^1(x_1), w)=0$:

根据定义 2[4],$V(\forall x_1\Box A_1^1(x_1)\rightarrow\Box\forall x_1A_1^1(x_1), w)=0$ 当且仅当:(i)并非 $T_V(\forall x_1\Box A_1^1(x_1)\rightarrow\Box\forall x_1A_1^1(x_1))\subseteq V(w)$,或(ii)存在满足条件 w≤y 的 $y\in W$,使得 $V(\forall x_1\Box A_1^1(x_1), y)=1$ 并且 $V(\Box\forall x_1A_1^1(x_1), y)=0$;由于 $T_V(\forall x_1\Box A_1^1(x_1)\rightarrow\Box\forall x_1A_1^1(x_1))=\varnothing\subseteq V(w)$,因此只需证明(ii)。

由于 $V'(x_1)=b\in V(u)$(V'是与 V"1 等值的"IQS5 赋值)时,$V'(A_1^1(x_1), u)=0$(由于 $V'(A_1^1, u)=V(A_1^1, u)=\{a, c\}$,而 $V'(x_1)=b\notin\{a, c\}$),并且 u≤u 成立,因此根据定义 2[7]可得 $V(\forall x_1A_1^1(x_1), u)=0$;由于 $T_V(\forall x_1A_1^1(x_1))=\varnothing\subseteq V(v)$ 并且 vRu 成立,因此根据定义 2[6]可得 $V(\Box\forall x_1A_1^1(x_1), v)=0$。

下面证明 $V(\forall x_1\Box A_1^1(x_1), v)=1$:

根据定义 2[7],只需证明对所有与 V 为"1 等值的"IQS5 赋值 V',对所有满足 v≤y 的 $y\in W$,当 $V'(x_i)\in V(y)$时,均有 $V'(\Box A_1^1(x_1), y)=1$。

进而需考虑两种情况(y 取值 v,y 取值 s):

(1)v≤v 时:由于 V(v)={a},因此 $V'(x_i)=a$。根据定义 2[6],要证明 $V'(\Box A_1^1(x_1), v)=1$ 成立,需要证明 $T_{V'}(A_1^1(x_1))\subseteq V'(v)$ 并且对所有满足 vRy 的 $y\in W$,都有 $V'(A_1^1(x_1), y)=1$。由于 $T_{V'}(A_1^1(x_1))=V'(v)=\{a\}$成立,因此只需证明对所有满足 vRy 的 $y\in W$,都有 $V'(A_1^1(x_1), y)=1$;需要考虑三种情况(y 取值 v,y 取值 s,y 取值 u):

(a)vRv:由于 $V'(x_1)=a$,$V'(A_1^1, v)=\{a\}$,因此 $V'(A_1^1(x_1), v)=1$。

(b)vRs:由于 $V'(x_1)=a$,$V'(A_1^1, s)=\{a, b, c\}$,因此 $V'(A_1^1(x_1), s)=1$。

(c)vRu:由于 $V'(x_1)=a$,$V'(A_1^1, u)=\{a, c\}$,因此 $V'(A_1^1(x_1), u)=1$。

这样就证明了 $v\leqslant v$ 时,$V'(\Box A_1^1(x_1), v)=1$ 成立。

(2)$v\leqslant s$ 时:由于 $V(s)=\{a, b, c\}$,因此 $V'(x_i)=a$ 或 $V'(x_i)=b$ 或 $V'(x_i)=c$。根据定义 2[6],要证明 $V'(\Box A_1^1(x_1), s)=1$ 成立,需要证明 $T_{V'}(A_1^1(x_1))\subseteq V'(s)$ 并且对所有满足 sRy 的 $y\in W$,都有 $V'(A_1^1(x_1), y)=1$。由于 $T_{V'}(A_1^1(x_1))\subseteq V'(s)=V(s)=\{a, b, c\}$ 成立,因此只需证明对所有满足 sRy 的 $y\in W$,都有 $V'(A_1^1(x_1), y)=1$;只需考虑一种情况(y 取值 s):

(a)sRs:由于 $V'(A_1^1, s)=\{a, b, c\}$,因此无论将 $V'(x_i)$ 赋值为 a,b,c 三者中任意一个值,均有 $V'(x_i)\in V'(A_1^1, s)$,即 $V'(A_1^1(x_1), s)=1$。这样就证明了 $v\leqslant s$ 时,$V'(\Box A_1^1(x_1), s)=1$ 成立。

最后,由于 $T_V(\forall x_1\Box A_1^1(x_1)\to\Box\forall x_1 A_1^1(x_1))=\varnothing\subseteq V(w)$,并且 $w\leqslant v$ 成立,结合上面所得的结论 $V(\forall x_1\Box A_1^1(x_1), v)=1$ 和 $V(\Box\forall x_1 A_1^1(x_1), v)=0$,再根据定义 2[4]可知:

$V(\forall x_1\Box A_1^1(x_1)\to\Box\forall x_1 A_1^1(x_1), w)=0$。

由此根据定义 3 可知,$\forall x_1\Box A_1^1(x_1)\to\Box\forall x_1 A_1^1(x_1)$ 不是 IQS5 有效的;再利用 IQS5 的弱可靠性即可证明上述巴坎公式不是 IQS5 的内定理。

接下来,无需系统的推演,从语义角度利用 IQS5 的弱完全性,使用反证法即可证明逆巴坎公式 $\Box\forall x_i A\to\forall x_i\Box A$ 是系统 IQS5 内定理,证明从略。

因此 IQS5 不接受巴坎公式而接受逆巴坎公式。

结语

经典量化模态逻辑系统 S5 能接受巴坎公式,但较弱的直觉主义量化模态逻辑系统 IQS5 由于失去了排中律,即使容纳了公理 5,依然不足以接受巴坎公式。进而引出了一个新问题:

由于中间逻辑(intermediate logics)强于直觉主义逻辑而弱于经典逻辑,因此是否存在某个量化的中间逻辑,使得对其做 S5 模态扩充所得的系统接受巴坎公式?

这是可以进一步做的工作,留待后续研究。

Intuitionistic Quantified Modal Logic and the Barcan Formula

CHENG Huaqing

(School of Liberal Arts, Anhui Normal University, Wuhu 241002, China)

Abstract: There exists an unsolved problem that whether the intuitionistic quantified modal logic IQS5 accepts the Barcan formula. By constructing a new Kripkean semantics for the system, the weak soundness theorem and the weak completeness theorem can be proved. And then it can be proved that the Barcan formula is not a theorem of the system by using the method of constructing counter-model. So IQS5 does not accept the Barcan formula but accept its converse.

Key words: intuitionistic logic; intuitionistic modal logic; the Barcan formula

(责任校对　葛丽萍)