第 28 卷 第 6 期　湖南科技大学学报(社会科学版)　Vol.28 No.6
2025 年 11 月　Journal of Hunan University of Science and Technology(Social Science Edition)　Nov. 2025

doi:10.13582/j.cnki.1672-7835.2025.06.009

团队逻辑的否定难题及其解决策略

颜中军

(湖南科技大学 马克思主义学院,湖南 湘潭 411201)

摘　要:否定在团队逻辑中是一个棘手的联结词。相较于经典逻辑把矛盾否定视为初始联结词和语义算子,IF 逻辑把对偶否定视为初始联结词和非语义算子,团队逻辑似乎面临两难选择:它在矛盾否定下不具有向下封闭性,而对偶否定又不具有语义运算功能。为此,团队逻辑需要调整评估公式意义的方式,用更加彻底的双边否定来整合矛盾否定和对偶否定。这种策略较为简洁直观,与团队逻辑改变传统赋值方式的精神实质是一致的。

关键词:团队逻辑;双边否定;对偶否定;团队语义学;博弈论语义学

中图分类号:B81　**文献标志码**:A　**文章编号**:1672-7835(2025)06-0081-08

团队逻辑(team logics)是一类以团队语义学(team semantics,又译作“屉语义”)为解释框架的逻辑,旨在比经典逻辑和 IF 逻辑(independence-friendly logic,简称 IF 逻辑)更加充分、更加精细地刻画语义单元之间的依赖关系。团队语义学最初是为了给 IF 逻辑提供一种组合语义,后来被广泛用于命题、模态、时态、概率等领域,形成以依赖逻辑(dependence logic)为谱系的团队逻辑及其变体。

在基于团队语义学的逻辑语言中,否定的使用范围受到严格限制,通常只允许对经典原子公式进行否定,大部分结果是在不把否定作为初始联结词的条件下获得的。因为团队逻辑在矛盾否定下不具有向下封闭性,而对偶否定又不具有语义运算功能,由此导致团队逻辑陷入两难困境。如何摆脱这一困境?怎样克服矛盾否定和对偶否定的不足,恢复否定的语义运算功能?能否将其结果推广至包含否定初始联结词的团队逻辑?本文试图对这些悬而未决的问题作出回应。

一、经典逻辑、矛盾否定及其塔斯基语义

为了更好地阐明团队逻辑中否定难题的来龙去脉,为后文的讨论提供相关背景和铺垫,我们有必要先剖析经典逻辑和 IF 逻辑对否定的刻画。这不仅与三者的发展顺序相符,同时也契合它们之间的内在关联。在不加说明的情况下,本文的讨论仅限一阶范围,并且假定所有公式具有否定范式形式。

(一)经典逻辑的句法和语义

1.经典逻辑的句法

设 L 为经典逻辑的词汇或语言,$P_1 \cdots P_n$ 是 L 的谓词,$t_1 \cdots t_n$ 是 L 的项(term),$x_1 \cdots x_n$ 是 L 的个体变元。经典逻辑公式可递归定义如下:

$\varphi ::= P(t_1 \cdots t_n) \mid t_1 = t_2 \mid \top \mid \bot \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \exists x\varphi \mid \forall x\varphi$

其中,$P(t_1 \cdots t_n)$、$t_1 = t_2$、$\top$、$\bot$皆为原子公式,$\top$表示恒真,$\bot$表示恒假。

2.经典逻辑的塔斯基语义

设 M 为 L 的模型或结构,D 为 M 的非空论域(个体域),Var 是 L 的个体变元的(可数无穷)集合,M 上的一个赋值 σ 是函数 f:X→D,其中,X 为赋值 σ 的论域,X ⊆Var。σ 为 X 中的每个变元指派 D 中的

收稿日期:2025-07-16

基金项目:国家社会科学基金年度项目(24BZX111)

作者简介:颜中军(1982—),男,湖南衡东人,博士,教授,博士生导师,主要从事现代逻辑及其哲学问题研究。

某个元素作为它的值。设 $x \in Var, d \in D$, $\sigma(d/x)$ 是 M 上的一个改性赋值(modified assignment)函数 $f_{(d/x)}: X \cup \{x\} \to D$,它与 σ 的唯一不同之处在于它把 σ 对 x 的赋值修改为 d,其余保持不变①。公式 φ 在模型 M 中相对于赋值 σ 为真,记为 $\{M, \sigma\} \models \varphi$。相应地,公式 φ 在模型 M 中相对于赋值 σ 为假,记为 $\{M, \sigma\} \not\models \varphi$。因此,经典逻辑公式的满足关系(即 $\{M, \sigma\} \models \varphi$)可定义如下:

$\{M, \sigma\} \models P(t_1 \cdots t_n)$,当且仅当 $(t_1^{\sigma} \cdots t_n^{\sigma}) \in P^M$

$\{M, \sigma\} \models t_1 = t_2$,当且仅当 $t_1^{\sigma} = t_2^{\sigma}$

$\{M, \sigma\} \models \top$,任意 σ 都满足

$\{M, \sigma\} \models \bot$,任意 σ 都不满足

$\{M, \sigma\} \models \neg\alpha$,当且仅当 $\{M, \sigma\} \not\models \alpha$

$\{M, \sigma\} \models \alpha \wedge \beta$,当且仅当 $\{M, \sigma\} \models \alpha$ 并且 $\{M, \sigma\} \models \beta$

$\{M, \sigma\} \models \alpha \vee \beta$,当且仅当 $\{M, \sigma\} \models \alpha$ 或者 $\{M, \sigma\} \models \beta$

$\{M, \sigma\} \models \exists x\alpha$,当且仅当对某些 $d \in D$ 使得 $\{M, \sigma(d/x)\} \models \alpha$

$\{M, \sigma\} \models \forall x\alpha$,当且仅当对所有 $d \in D$ 都有 $\{M, \sigma(d/x)\} \models \alpha$

如果 φ 在 M 的任意赋值下都为真,则称 M 为 φ 的一个模型(记为 $M \models \varphi$)。如果 φ 在任意模型中都为真,那么 φ 是系统中的逻辑真理(记为 $\models \varphi$)。

(二)经典逻辑对否定的刻画

根据经典逻辑的句法和语义,不难看出经典逻辑对否定的刻画。在经典逻辑语言中只有一个否定符号,即¬。句法上,它是一元的初始联结词,位于公式 φ 之前,构成一类复合公式——否定式“¬φ”。语义上,经典否定是真值函数 $f_{\neg}: \varphi \to \{真, 假\}$,旨在实现真与假之间的切换并且递归地应用于自己的输出:若 φ 为真,则¬φ 为假;若 φ 为假,则¬φ 为真。φ 与¬φ 具有矛盾关系,所以经典否定亦被称做矛盾否定。经典否定的句法运算和语义运算一一对应,满足组合性要求,因为¬φ 的值仅仅取决于它的组成成分 φ 的值和¬运算。与否定有关的如下规则或定律在经典逻辑中是有效的:

(1)否定引入规则:如果 $\Gamma, \alpha \models \bot$,那么 $\Gamma \models \neg\alpha$

(2)等价替换律:$\models \alpha \equiv \beta \leftrightarrow \neg\alpha \equiv \neg\beta$

(3)爆炸原理:$\alpha, \neg\alpha \models \beta$

(4)不矛盾律:$\models \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

(5)排中律:$\models \alpha \vee \neg\alpha$

除此之外,经典否定还满足如下对偶性等价关系:

(1)$\neg\neg\alpha \equiv \alpha$

(2)$\neg\bot \equiv \top$;$\neg\top \equiv \bot$

(3)$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$;$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$

(4)$\neg\forall x\alpha \equiv \exists x \neg\alpha$;$\neg\exists x\alpha \equiv \forall x \neg\alpha$

经典否定的上述特征使得经典逻辑具有完全性等良好的元性质,而 IF 逻辑和团队逻辑丧失了否定的部分特征,导致它们不具有通常意义上的完全性。

(三)亨金语句与经典否定的挑战

经典否定一个值得注意的现象是,它可以利用对偶性等价关系在量词的辖域范围自由移入或移出,只不过要求切换对偶的量词符号(即∀与∃),所得到的新公式仍然是经典逻辑公式并且它与原公式等价,对于嵌套的经典量化公式也是如此。例如:

(1)$\neg\forall x \exists y \forall z \exists w\, \Phi(x, y, z, w) \leftrightarrow \exists x \forall y \exists z \forall w\, \neg\Phi(x, y, z, w)$

(2)$\forall x \exists y \forall z \exists w\, \neg\Phi(x, y, z, w) \leftrightarrow \neg\exists x \forall y \exists z \forall w\, \Phi(x, y, z, w)$

①要注意,既有可能 $x \in X$,也有可能 $x \notin X$。如果 $x \in X$,则 $\sigma(d/x)$ 只是把 $\sigma(x)$ 的值替换为 d;如果 $x \notin X$,则 $\sigma(d/x)$ 补充了新的变元 x 并且把 d 指派给 x。下同。

但是,经典否定在量词辖域范围进行自由移动并不是普遍可行的。例如,对亨金语句(Henkin sentence)就行不通:

$$(3)\quad \left.\begin{matrix}\forall x\ \exists y\\ \forall z\ \exists w\end{matrix}\right\}\Phi(x,\ y,\ z,\ w)$$

因为经典逻辑的嵌套量词具有线序依赖关系,域窄的存在量词约束变元依赖于域宽的全称量词约束变元,而亨金语句表征了量词之间非线序依赖关系:虽然∃y 依赖于∀x,但独立于∀z;类似地,虽然∃w 依赖于∀z,但独立于∀x;并且上下枝之间处于并行关系,需要同时对∀x 与∀z、∃y 与∃w 进行赋值,而不是依次对∀x、∃y、∀z、∃w 进行赋值。另外,亨金语句的矛盾否定不一定是亨金语句①,而经典逻辑语句的矛盾否定仍然是经典语句。如何准确刻画亨金语句所蕴含的独立性? 如何合理解释亨金语句的否定? 经典逻辑及塔斯基语义学对此无能为力,于是 IF 逻辑及其博弈论语义学应运而生。

二、IF 逻辑、对偶否定及其博弈语义

如前所述,经典否定是一种弱的矛盾否定,它可以出现在公式的任何位置,其基本功能是进行真假切换,是一种彻底的(exhaustive)、完全的(full)否定。但是,在日常语言和科学理论中,否定除了可以表示矛盾关系,还常常用来表示对偶关系,并且对偶关系不可还原为矛盾关系。所以,经典逻辑对否定的刻画是不充分的,不能满足日常语言和科学理论的需要。

(一)IF 逻辑的句法和语义

IF 逻辑的构思十分巧妙:句法上,采用斜杠符"/"表示独立,以维持公式从左至右的水平书写习惯;语义上,利用博弈玩家的非完美信息状态来刻画逻辑表达式之间的独立性。它严格区分了句法辖域和语义辖域:斜杠量词(∃y/∀x)表示∃y 位于∀x 的句法辖域之内,但语义上独立于∀x。与斯科仑函数进路相比,IF 逻辑仍然在一阶层面处理亨金语句,避免了过多的本体论负担。

1.IF 逻辑的句法

句法上,IF 逻辑语言 L′实质是经典逻辑语言 L 的扩充,只不过增加了斜杠符以及相应的斜杠公式集。虽然独立性可以扩展至任意的逻辑表达式之间,但这里只需讨论 IF 逻辑的最简版本就足够了,即仅在经典逻辑语言的基础上添加斜杠量词(∃y/∀x)。IF 逻辑公式可递归定义如下:

$$\varphi ::= P(t_1\cdots t_n) \mid t_1=t_2 \mid \top \mid \bot \mid \sim\varphi \mid \varphi\wedge\varphi \mid \varphi\vee\varphi \mid \exists x\varphi \mid \forall x\varphi \mid (\exists y/\forall x)\varphi$$

根据上述定义,亨金语句(例句 3)可以用 IF 逻辑公式来刻画:$\forall x\ \exists y\ \forall z(\exists w/\forall x)\Phi(x,\ y,\ z,\ w)$。要注意,斜杠量词公式不能出现空约束和重复约束,并且论域中的个体元素不少于 2 个,否则独立性就失去了意义②。

2.IF 逻辑的博弈论语义

为了语义博弈顺利进行,L′必须是解释过的语言,所有原子公式实质上是原子语句。设 φ 是 L′-公式,M 为 L′的模型或结构,D 为 M 的非空论域,σ 为 M 上的一个赋值,σ(d/x)是 M 上的一个改性赋值。φ 在模型 M 和赋值 σ 下的二人零和博弈记为 G(M, σ, φ),玩家Ⅰ和Ⅱ分别扮演初始证实者和证伪者角色。

IF 逻辑公式的博弈规则如下:当遇到∨、∃x 或(∃y/∀x)时,由玩家Ⅰ采取行动;当遇到∧、∀x 时,由玩家Ⅱ采取行动;当遇到~时,双方调换角色;当遇到原子公式时,双方不采取任何行动。

与塔斯基语义学由内向外进行赋值不同,博弈论语义学是由外向内进行赋值。如果公式的长度是有限的,那么博弈进行到一定阶段,所有的变元均会被替换为论域中的相应个体,最终形成一个不含任

①很显然,一阶的亨金语句(例句 3)等价于一个存在性二阶语句:$\exists f\exists g\ \forall x\ \forall z\ \Phi(x, f(x), z, g(z))$。所以,亨金语句的矛盾否定可以改写为:$\neg\ \exists f\exists g\ \forall x\ \forall z\ \Phi(x, f(x), z, g(z))$。它等价于一个全称性二阶语句$\forall f\ \forall g\ \exists x\ \exists z\neg\ \Phi(x, f(x), z, g(z))$。这不再是存在性二阶语句,不能等价翻译为任何一阶的亨金语句。

②例如,在$\forall x\ \exists z(\exists y/\forall x)\Phi(x, y)$的语义博弈中,尽管 z 不在$\Phi(x, y)$中出现,但由于∃z 依赖于∀x,因此∃z 知道∀x 的值并且将∀x 的值泄露给∃y,这将导致(∃y/∀x)失去了意义。类似地,在$\forall x\ \exists y(\exists y/\forall x)\Phi(x, y)$的语义博弈中,y 被约束两次,既然前一个∃y 依赖(知道)∀x 的值,同样会导致(∃y/∀x)失去意义。另外,如果论域只有 1 个个体,例如{a},那么∃y 与∀x 之间的独立性体现不出来。

何逻辑常项和个体变元的原子语句。博弈胜负由原子语句决定:如果原子语句为真,则玩家Ⅰ胜出,否则玩家Ⅱ胜出。但是公式的真假并不取决于某一次博弈玩局的胜负而取决于取胜策略,即在所有博弈玩局中都能够胜出的策略。取胜策略实质是 M 所有可能赋值的集合。

定义 1(IF 逻辑公式的满足)

(1)φ 在 M 和 σ 下是可满足的(记为{M, σ}$\models_{GTS}\varphi^{+}$),当且仅当玩家Ⅰ在 G(M, σ, φ)中有取胜策略;

(2)φ 在 M 和 σ 下是不可满足的(记为{M, σ}$\models_{GTS}\varphi^{-}$),当且仅当玩家Ⅱ在 G(M, σ, φ)中有取胜策略。

定义 2(IF 逻辑公式的真假)

与经典逻辑相似,IF 逻辑公式的真假不受变元赋值的影响:

(1)φ 在 M 中为真(记为 M $\models_{GTS}\varphi^{+}$),当且仅当玩家Ⅰ在 G(M, φ)中有取胜策略;

(2)φ 在 M 中为假(记为 M $\models_{GTS}\varphi^{-}$),当且仅当玩家Ⅱ在 G(M, φ)中有取胜策略。

同样与经典逻辑相似,如果 φ 在任意模型中都为真,那么 φ 是系统中的逻辑真理(记为$\models_{GTS}\varphi$)。然而,博弈论语义学并不预设任何公式非真即假。尽管双方不可能在 G(M, φ)中同时拥有取胜策略,但有可能都没有取胜策略。这意味着在 IF 逻辑中存在一类不确定性语句,排中律失效了。

定义 3(不确定性)

(1)G(M, φ)是不确定的,当且仅当双方在 G(M, φ)中都没有取胜策略;

(2)φ 在 G(M, σ,φ)中是不确定的,当且仅当双方在 G(M, σ, φ)中都没有取胜策略;

(3)φ 在 M 中是不确定的,当且仅当 M$\not\models_{GTS}(\varphi\vee\sim\varphi)^{+}$。

当然,博弈论语义学也适用于经典逻辑。不同之处在于,经典逻辑公式的嵌套辖域具有线序依赖关系,这意味着玩家具有完美信息(即在采取行动时清楚地知道之前的所有取值),导致它的语义博弈具有确定性。但这不是博弈论语义学的固有特征。相反,不确定性才是博弈论语义学的一般性、结构性特征。所以,从博弈论语义学角度看,经典逻辑相当于 IF 逻辑的确定性片段。

(二)IF 逻辑对否定的刻画

IF 逻辑是经典逻辑的保守扩充,仅添加了斜杠量词,用对偶否定替代矛盾否定。尽管对偶否定也满足对偶性等价关系①,但对偶否定的逻辑功能不是切换公式的真假,而是切换玩家扮演的角色,是一种相对的、非完全的否定。因为对偶否定与真假没有直接的联系,玩家Ⅰ在 G(M, α)中有取胜策略并不意味着玩家Ⅱ在 G(M, $\sim\alpha$)中有取胜策略,由此丧失了经典否定的许多性质。例如,组合原则在 IF 逻辑中失效了,因为我们不能根据 α 的值来确定$\sim\alpha$ 的值。或者说,否定引入规则失效了,因为我们不能根据 α 没有模型来确定$\sim\alpha$ 有模型。另外,否定语境下的等价替换律也失效了,α 与 β 有相同模型类不意味着$\sim\alpha$ 与$\sim\beta$ 也有相同模型类,反之亦然。在经典逻辑中,α 与$\neg\alpha$ 的模型类是互补关系(如图 1);而在 IF 逻辑中,α 与$\sim\alpha$ 的模型类仅仅是不相交关系(如图 2)。

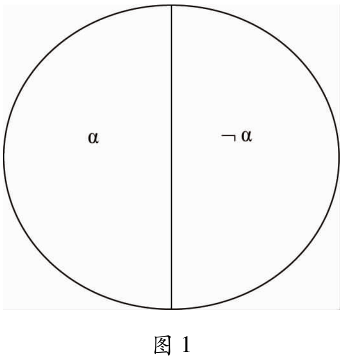

图 1

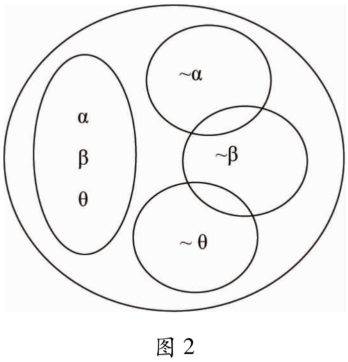

图 2

①在 IF 逻辑中,除了满足经典否定那些等价关系,还有$\sim(\exists y/\forall x)\varphi\equiv\forall x(\sim\varphi)$。

那么,能否在 IF 逻辑中表达和解释矛盾否定呢? 答案是肯定的,但要付出相应代价。设 φ 为 IF-语句,在 L′的基础上增加矛盾否定,由此得到扩展的 IF 逻辑。句法上,矛盾否定只能出现在语句最前端,而不能出现在语句内部,尤其是不能出现在量词辖域范围之内。另外,也不能出现在原子语句之前,否则“~”与“¬”没有差别。这些限制是必要的,因为没有针对矛盾否定的博弈规则。语义上,矛盾否定对应的实际就是那些不真的语句和不假的语句。因此,$\neg\varphi$ 在 IF 逻辑中的真假可间接定义如下:

(1)$\neg\varphi$ 在 M 中为真(记为 $M \models_{GTS} (\neg\varphi)^{+}$),当且仅当玩家Ⅰ在 G(M, φ)中没有取胜策略(即 φ 不真,记为 $M \not\models_{GTS} \varphi^{+}$);

(2)$\neg\varphi$ 在 M 中为假(记为 $M \models_{GTS} (\neg\varphi)^{-}$),当且仅当玩家Ⅱ在 G(M, φ)中没有取胜策略(即 φ 不假,记为 $M \not\models_{GTS} \varphi^{-}$)。

由上可知,$\neg\varphi$ 的真值取决于整场博弈 G(M, φ)的胜负,不能直接通过博弈规则而只能借助对偶否定及其他联结词才能获得解释。这说明,对偶否定与矛盾否定层次不同:对偶否定对应于具体的博弈行动(玩局层次),矛盾否定对应于博弈的整体状况(策略层次),对偶否定是矛盾否定的基础。

尽管如此,从根本上来说,在 IF 逻辑中矛盾否定实际上是不可定义的。因为在 IF 逻辑中“真”“假”“不真”“不假”是四个不同的概念。对 φ 的否定,不能确定到底是 $\neg\varphi$ 还是 $\sim\varphi$。另外,双重否定律的一个方向也失效了,虽然有 $\sim\sim\varphi\equiv\varphi$,但 $\neg\sim\varphi\equiv\varphi$ 不成立,我们只能得到 $\varphi\rightarrow\neg\sim\varphi$(即如果玩家Ⅰ有取胜策略,那么玩家Ⅱ没有取胜策略)而不能得到 $\neg\sim\varphi\rightarrow\varphi$(即如果玩家Ⅱ没有取胜策略,那么玩家Ⅰ有取胜策略)①。虽然添加矛盾否定会增强 IF 逻辑的表达力,但是 IF 逻辑不能在矛盾否定下封闭②,由此导致 IF 逻辑不能完全公理化。

(三)伯吉斯定理与对偶否定的挑战

除了上述问题,伯吉斯(J. P. Burgess)还注意到,对偶否定显示出亨金语句逻辑的极端不确定性,即对任意的亨金语句 α 和 β,如果 α 和 β 没有相同的模型,那么一定存在亨金语句 θ,使得 $\alpha=\theta$ 并且 $\beta=\sim\theta$③。这是克雷格插值定理(Craig interpolation theorem)在亨金语句逻辑中的一个推论,该推论亦被称做伯吉斯定理(Burgess theorem)。虽然伯吉斯定理最初是针对亨金语句逻辑而言的,但同样适用于 IF 逻辑,因为 IF 逻辑不过是对亨金语句的另一种刻画。伯吉斯对亨迪卡(J. Hintikka)及其 IF 逻辑对否定的刻画提出过尖锐批评:

> “近年来,亨迪卡和他的同事们在‘独立友好’逻辑的标签下复兴了亨金语句逻辑的一个变体版本,为这个‘新’逻辑重述了许多关于存在性二阶语句的定理,并对被重述的定理的哲学重要性作出了言过其实的主张。在讨论这些哲学主张时,无论是赞成还是反对,都没有充分强调对立性——唯一一种可用的‘否定’,——无法对应于对模型类的任何操作。因此,似乎有必要以上述推论的形式,清楚地说明失败究竟有多彻底。”④

伯吉斯指出,对偶否定不与任何语义运算相对应,因为我们不能根据 φ 的模型类来确定 $\sim\varphi$ 的模型类(如图 2 所示,$\sim\alpha$、$\sim\beta$、$\sim\theta$ 皆与 α 不相交,皆可视为 α 的否定)⑤。那么,伯吉斯定理及其结论是否对团队逻辑有效呢? 下文将看到,虽然团队逻辑采用的双边否定(bilateral negation)是一个语义算子,但同样会导致不确定性。所以,伯吉斯定理及其结果对团队逻辑仍然成立。

三、团队逻辑、双边否定及其团队语义

团队逻辑以团队语义学为解释框架,其要点是采用团队(即赋值集 $\{\sigma_1\cdots\sigma_n\}$)而不是像塔斯基语义

①在 IF 逻辑中,¬不能出现在语句内部,没有针对¬的博弈规则。所以,$\neg\neg\varphi$ 和 $\sim\neg\varphi$ 是没有意义的。双重否定只有 $\sim\sim\varphi$ 和 $\neg\ \sim\varphi$。

②因为存在性二阶逻辑不能在矛盾否定下封闭,IF 逻辑的表达力相当于存在性二阶逻辑,所以 IF 逻辑也不能在矛盾否定下封闭。

③Burgess J P. “A Remark on Henkin Sentences and Their Contraries”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 2003, 44(3): 187.

④Burgess J P. “A Remark on Henkin Sentences and Their Contraries”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 2003, 44 (3): 187-188.

⑤Burgess J P. “A Remark on Henkin Sentences and Their Contraries”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 2003, 44 (3): 187.

学那样以单项赋值 σ 的方式给变元进行派值①。当然,团队逻辑并不局限于依赖逻辑及其变体,我们可以对经典逻辑、模态逻辑、直觉主义逻辑、IF 逻辑等进行团队化,将其转化为对应版本的团队逻辑。为了便于比较,我们可以在经典逻辑基础上构建一个一般性的团队逻辑②,这有助于揭示团队逻辑的普遍特性,为解决团队逻辑的否定难题提供新思路。

(一)团队逻辑的句法和语义

1.团队逻辑的句法

设 L'' 为团队逻辑的语言,P 为 L'' 的谓词,$t_1 \cdots t_n$ 为 L'' 的项,团队逻辑公式可递归定义如下:

$\varphi ::= P(t_1 \cdots t_n) \mid \sim P(t_1 \cdots t_n) \mid t_1 = t_2 \mid \sim t_1 = t_2 \mid \top \mid \bot \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \exists x\varphi \mid \forall x\varphi$③

与 IF 逻辑不同,团队逻辑把矛盾否定当作初始联结词,把对偶否定限制在经典原子公式之前。这样一来,经典逻辑(具有范式形式)相当于不含 $\neg$ 的团队逻辑片段。

2.团队逻辑的团队语义

设 M 为模型,D 为 M 的非空论域(个体元素 $\geqslant 2$),T 为 M 上的赋值团队,X 为 T 的论域,$X \subseteq Var$。团队 T 是 M 上赋值 σ 的集合,σ 是函数 $f: X \to D$。为了解释量词的语义,除了需要通常的改性赋值 $\sigma(d/x)$,还需要借助改性团队。设 F 为团队改性函数:$T \to \wp(D)$,它将团队 T 修改或扩充为一个补充团队(supplementing team)$T_{(F/x)} = \{\sigma(d/x) \mid s \in T,\ d \in F(s)\}$。若 $F(s) = D$,则称改性团队为 T 的复制团队(duplicating team),记为 $T_{(D/x)}$。改性团队的论域为 $X' = X \cup \{x\}$。团队逻辑公式的满足关系(记为 $\{M,\ T\} \vDash \varphi$)可定义如下:

$\{M,\ T\} \vDash P(t_1 \cdots t_n)$,当且仅当对任意的 $\sigma \in T$:$(t_1^{\sigma} \cdots t_n^{\sigma}) \in P^M$

$\{M,\ T\} \vDash \sim P(t_1 \cdots t_n)$,当且仅当对任意的 $\sigma \in T$:$(t_1^{\sigma} \cdots t_n^{\sigma}) \notin P^M$

$\{M,\ T\} \vDash t_1 = t_2$,当且仅当对任意的 $\sigma \in T$:$t_1^{\sigma} = t_2^{\sigma}$

$\{M,\ T\} \vDash \sim t_1 = t_2$,当且仅当对任意的 $\sigma \in T$:$t_1^{\sigma} \neq t_2^{\sigma}$

$\{M,\ T\} \vDash \top$,任意 T 都满足

$\{M,\ T\} \vDash \bot$,当且仅当 $T = \varnothing$

$\{M,\ T\} \vDash \neg\alpha$,当且仅当 $\{M,\ T\} \nvDash \alpha$

$\{M,\ T\} \vDash \alpha \wedge \beta$,当且仅当 $\{M,\ T\} \vDash \alpha$ 并且 $\{M,\ T\} \vDash \beta$

$\{M,\ T\} \vDash \alpha \vee \beta$,当且仅当 $T = T_1 \cup T_2$,$\{M,\ T_1\} \vDash \alpha$ 并且 $\{M,\ T_2\} \vDash \beta$

$\{M,\ T\} \vDash \exists x\alpha$,当且仅当存在补充函数 F:$T \to \wp(D)$,使得 $\{M,\ T_{(F/x)}\} \vDash \alpha$

$\{M,\ T\} \vDash \forall x\alpha$,当且仅当 $\{M,\ T_{(D/x)}\} \vDash \alpha$

不难看出,团队语义学相当于塔斯基语义学的升级版,即由单项赋值升级为团队赋值,同样具有组合性。因为语句是不含自由变元的闭公式,所以它不受变元取值的影响:要么所有非空团队满足它,要么没有非空团队满足它,即 $\{M,\ \{\varnothing\}\} \vDash \varphi$ 或 $M \vDash \varphi$④。

(二)团队逻辑的否定难题

对比可知,经典逻辑把矛盾否定(亦称经典否定)作为初始联结词,IF 逻辑把对偶否定(亦称博弈否

①实际上,亨迪卡所提倡的博弈论语义学也采取单项赋值的方式。正因为如此,亨迪卡认为博弈论语义学违背了组合原则。如果改变博弈方式,例如采取团队赋值博弈,那么可以重新恢复组合原则。参见:Hodges W.“Compositional Semantics for a Language of Imperfect Information”, *Logic Journal of the IGPL*, 1997, 5(4): 539-563; Hodges W.“Compositionality Is Not the Problem”, *Logic and Logical Philosophy*, 1998, 6(6): 7-33; 颜中军:《独立友好逻辑研究》, 上海交通大学出版社 2024 年版, 第 114 页。

②在这个一阶团队逻辑基础上添加各种各样的非经典原子,从而形成各种版本的团队逻辑。例如,添加依赖原子“$=(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$”(直观含义是:$\mathbf{y}$ 的值仅函项性地依赖于 $\mathbf{x}$ 的值。注:小写字母加粗表示向量)、独立原子“$\mathbf{y} \perp_{\mathbf{x}} \mathbf{z}$”(直观含义是:给定 $\mathbf{x}$ 的值,$\mathbf{z}$ 的值独立于 $\mathbf{y}$ 的值)、包含原子“$\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y}$”(直观含义是:在团队 X 中,每个 $\mathbf{x}$ 的值都是 $\mathbf{y}$ 的值)和排除原子“$\mathbf{x} \mid \mathbf{y}$”(直观含义是:在团队 X 中,$\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 没有相同的值),就可得到所谓的依赖逻辑、独立逻辑(independence logic)、包含逻辑(inclusion logic)和排除逻辑(exclusion logic)。

③这个团队逻辑的句法设定不是本文的主张而是要分析和批判的对象。之所以引用它,是因为它具有代表性和一般性。参见 Lück M. *Team Logic: Axioms, Expressiveness, Complexity*. PhD Thesis, Leibniz University Hanover, 2020, p.17.

④当然,也可以用博弈论语义学来等价定义团队逻辑语句 φ 的真,即玩家 I 在 $G_{(M,\ T)}(\varphi)$ 中有统一的(uniform)取胜策略。

定)作为初始联结词,团队逻辑把矛盾否定当作初始联结词,把对偶否定限制在经典原子公式之前。经典逻辑区分了“真”“假”,IF 逻辑区分了“真”“假”“不真”“不假”,团队逻辑进一步区分了⊥(表示仅被空团队满足)、¬⊥(记为 NE,表示针对⊥的团队非空)、¬⊤(记为⫫,表示没有针对⊤的团队)和¬~φ(记为 Eφ,表示在当前团队中至少存在某些赋值满足 φ,可等价定义为(⊤∨(¬⊥∧φ))[①])。

另外,矛盾否定在经典逻辑中是一个独立的语义算子。但在 IF 逻辑中,矛盾否定不是初始联结词,而是寄生在对偶否定之上的非语义算子,矛盾否定只能用于复合语句之前,¬φ 表示玩家没有针对 φ 的取胜策略。与之不同,团队逻辑把矛盾否定作为初始联结词,把对偶否定限制在经典原子公式之前而不允许出现在非经典原子公式或复合公式之前。对偶否定在团队逻辑中实际上只是一个“句法否定”而非语义算子。“也就是说,为了计算公式~φ 的意义,必须通过运用德摩根定律和双重否定律,将否定~放在原子公式的最前面。”[②]我们不能从 α 与 β 之间语义等价推出~α 与~β 之间也语义等价。虽然矛盾否定是一个语义算子,但是团队逻辑在矛盾否定下通常不具有向下封闭性[③]。

除此之外,团队逻辑还具有一个特征——空团队性,即每个团队逻辑公式都被空团队满足。这意味着,它们的矛盾否定不能被空团队满足。也就是说,我们不能根据公式 φ 来定义它的矛盾否定¬φ。“这种技术上的微妙使经典的矛盾否定变得不那么有趣。”[④]那么,如何刻画一个彻底的、完全意义上的否定,并且用它来整合矛盾否定和对偶否定,使其兼具二者的优点而克服各自不足,这是当代团队逻辑理论亟待解决的否定难题。

(三)“断定-反驳”模型与双边否定

一种解决团队逻辑否定难题的可能策略是,调整评估公式意义的方式,用“断定—反驳”模型(the “assertion-rejection” model)来重新定义否定。这种处理方法较为简单和直观,并且与团队语义学改变传统赋值方式的精神实质相一致。

首先,把团队语义看做一种双边语义,严格区分团队在评估公式意义方面扮演的两种不同角色:肯定性语义关系(表示可断定性,记为⊨)和否定性语义关系(表示可反驳性,记为⫤)。

其次,定义一个新的否定概念——双边否定。设 M 为模型,T 为 M 上的赋值团队,φ 为团队逻辑公式,φ 的双边否定(记为ꝸφ)可定义为:

(1){M, T}⊨ꝸφ 当且仅当{M, T}⫤φ;

(2){M, T}⫤ꝸφ 当且仅当{M, T}⊨φ[⑤]。

接着,给出 φ 的完整意义(full meaning)。这不仅需要考虑使 φ 为真的模型(记为[φ]),同时还需要考虑使 φ 为假的模型(记为[ꝸφ]);不仅需要考虑[φ]的肯定性语义$[φ]^{+}$,而且还需要考虑[φ]的否定性语义$[φ]^{-}$。后者不可还原为前者,二者应置于同等地位加以考察。换言之,φ 的完整意义实际上由两部分构成,由此形成一种双模型结构($[φ]^{+}$, $[φ]^{-}$)[⑥⑦]。这样的双模型有时亦称作合作团队(co-team)。前者相当于证实 φ 的团队,后者相当于证伪 φ 的团队。

最后,为了从 φ 的意义得到ꝸφ 的意义,我们只需将($[φ]^{+}$,$[φ]^{-}$)中的元素反转过来即可。换言之,($[φ]^{-}$,$[φ]^{+}$)相当于($[φ]^{+}$,$[φ]^{-}$)的否定[⑧]。这种否定既不是矛盾否定,也不是对偶否定,而是双

---

①Lück M. *Team Logic: Axioms, Expressiveness, Complexity*, PhD Thesis, Leibniz University Hanover, 2020, p.20.

②Yang F. “Negation and Partial Axiomatizations of Dependence and Independence Logic Revisited”, *Annals of Pure and Applied Logic*, 2019, 170(9): 1129.

③因为团队逻辑(例如依赖逻辑)的表达力与存在性二阶逻辑相当,已知后者在矛盾否定下不具有向下封闭性,所以前者亦然。

④Yang F. “Negation and Partial Axiomatizations of Dependence and Independence Logic Revisited”, *Annals of Pure and Applied Logic*, 2019, 170(9): 1129.

⑤Anttila A. *Not Nothing: Nonemptiness in Team Semantics*. PhD Thesis, University of Amsterdam, 2025, p.94.

⑥Anttila A. *Not Nothing: Nonemptiness in Team Semantics*. PhD Thesis, University of Amsterdam, 2025, p.98.

⑦当然,如果把否定性语义等价于矛盾否定,那么($[φ]^{+}$, $[φ]^{-}$)实际上就是([φ], [¬φ]);如果把否定性语义等价于对偶否定,那么($[φ]^{+}$, $[φ]^{-}$)实际上就是([φ], [~φ])。但双边否定既不同于矛盾否定,也不同于对偶否定,而是对矛盾否定和对偶否定的概括。

⑧Kontinen J. and Väänänen J. “A Remark on Negation in Dependence Logic”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 2011, 52(1): 56.

边否定。因此,在团队逻辑语言中只需要一个双边否定即可,并且作为初始联结词出现:

$$\varphi ::= P(t_1 \cdots t_n) \mid t_1 = t_2 \mid \top \mid \bot \mid \backsim\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \exists x\varphi \mid \forall x\varphi$$

这样的团队逻辑语言非常简洁直观,与经典逻辑相差无几。与矛盾否定相似之处在于,它恢复了否定的语义运算功能,团队逻辑在双边否定下可以保持向下封闭性,并且满足语义组合性、等价替换等经典性质,避免了空团队性质所带来的麻烦①。与对偶否定的相似之处在于,它同样揭示了团队逻辑的不确定性,因此伯吉斯定理在团队逻辑中仍然有效②。

结语

否定在日常语言和科学理论中具有举足轻重的地位。一个表达式的否定,通常用来表示它的对立面。但它的对立面到底是什么,对立面与它自身处于何种关系,不同的逻辑给出了不同的刻画,迄今仍然争论不休。经典逻辑把否定理解为矛盾关系,并且把它当做初始联结词和独立的语义算子,虽然具有确定性、封闭性、组合性、完全性等良好性质,但面临亨金语句的挑战,不能有效刻画逻辑表达式之间的独立关系。IF 逻辑把否定理解为反对关系,并且把对偶否定视为初始联结词和非语义算子,虽然迎合了独立性的要求,但会导致 IF 逻辑丧失部分经典性质,使其适用性受限。如何在团队逻辑中恢复否定的语义运算功能,同时避免矛盾否定和对偶否定的不足,是当代团队逻辑亟待解决的问题。不少团队逻辑学家采取因噎废食的策略:拒斥对偶否定,把矛盾否定严格限制在经典原子公式之前,不把否定作为初始联结词。实际上,我们不必在矛盾否定和对偶否定之间进行虚假的二元选择,可以直接改变公式意义的评估方式,用双边否定来整合矛盾否定和对偶否定。这种策略与团队逻辑改变传统赋值方式的精神实质相一致,不仅可以恢复否定的语义运算功能,而且使团队逻辑兼具比经典逻辑更加强大的表达力、比 IF 逻辑更加广泛的适用性③。

The Negation Problem in Team Logic and Its Solution Strategies

YAN Zhongjun

(School of Marxism, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

Abstract: Negation is a tricky connective in team logic. Compared with classical logic that regards contradictory negation as the initial conjunction and semantic operator, IF logic regards dual negation as the initial conjunction and non-semantic operator, team logic seems to be facing a dilemma: it does not have downward closure under contradictory negation, but dual negation does not have semantic operation functions. So, team logic needs to adjust the way of evaluation of formula's meaning and integrating contradictory negation and dual negation with a more thorough bilateral negation. This strategy is relatively simple and intuitive, and is consistent with the spirit of the change of the traditional assignment method in team logic.

Key words: team logic; bilateral negation; dual negation; team semantics; game-theoretical semantics

(责任校对　朱正余)

---

①当然,还存在其他定义完全否定(full negation)的方法,例如杨帆(Fan Yang)采用直觉主义蕴涵来定义(直觉主义)否定$\neg_I\varphi:\varphi \rightarrow_I \bot$。具体参见 Yang F. "There Are (Other) Ways to Negate in Propositional Team Semantics", in Sano K.(eds.), *Exploring Negation, Modality and Proof*, Logic in Asia: Studia Logica Library, Springer, 2025(forthcoming).

②例如 J Kontinen 和 J.Väänänen 已将伯吉斯定理推广至含自由变元的依赖逻辑公式,得出了类似的结果。参见 Kontinen J, Väänänen J. "A Remark on Negation in Dependence Logic", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 2011, 52 (1): 61.

③本文主要从理论层面提出解决策略,相关结果的技术证明需另外撰文讨论。